НЕКОТОРЫЕ ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ МОДЕЛИ ОПТИМИЗАЦИИ ПОРТФЕЛЯ

К. В. Криничанский, А. В. Безруков

В работе предложен способ решения некоторых задач, рассматриваемых в модели оптимизации портфеля ценных бумаг для случая безрискового заимствования и кредитования, а именно, определения параметров касательного портфеля и получения аналитического выражения уравнения CML. Оптимизация (расчет эффективной границы) осуществляется с использованием функции Лагранжа путем введения линейных уравнений функции полезности агента в качестве критических линий.

Введение

Методы решения задачи оптимизации портфеля ценных бумаг предложены в ряде работ зарубежных авторов: Гарри Марковиц (1952, 1956) [5], Уильям Шарп (1963) [7], Джеймс Тобин (1958, 1965) [8] и др.

В ряде работ, вышедших на русском языке, в более или менее подробном изложении были предложены алгоритмы решения частных задач, составляющих модель оптимизации инвестиционного портфеля [2, с. 195-256; 3]. Отдельный интерес представляют методы определения структуры касательного портфеля (оптимизация для случая возможности безрискового заимствования и кредитования), не требующие определения «угловых» портфелей. В частности, такой алгоритм предложен в работе Элтона Эдвина, Грубера Мартина, Паберга Манфреда (1976) [4] и приложен в работе У. Шарпа, Г. Александера и Дж. Бэйли [2, с. 253-255]. Однако данный метод имеет недостатки, так как требует анализа рыночной модели и извлечения из нее таких данных, как коэффициент бета (β_{il}) и параметр несистематического риска ($\sigma^2_{\varepsilon i}$). Недостатки со-

стоят в относительно большом количестве расчетов и нестабильности значений обозначенных параметров.

В настоящей статье предлагается решение задачи определения параметров касательного портфеля в рамках обобщения модели Г. Марковица на случай безрискового заимствования и кредитования. Оптимизация (расчет эффективной границы) осуществляется с использованием функции Лагранжа путем введения линейных уравнений функции полезности агента в качестве критических линий.

В качестве расчетных параметров нас интересуют такие параметры касательного портфеля, как координаты точки касания с эффективным фронтом, значения ожидаемой доходности и риска портфеля, структура портфеля. Предлагаемая модель позволяет также получить аналитический вид уравнения эффективного множества с условием заимствования и кредитования по безрисковой ставке (вид уравнения *CML*).

1. Модель

Дана функция $\sigma_p^2 = \sigma_p^2(r_p)$, выражающая зависимость риска портфеля ценных бумаг от ожидаемой доходности такого портфеля. График данной функции (см., например: [3, с. 25–26]) является кривой второго порядка, а следовательно, выражается полиномом $y(x) = ax^2 + bx + c$, где $x = r_p$, $y(x) = \sigma_p^2$ (см. рис. 1).

На основе исходных данных о доходностях имеющихся ценных бумаг или характеристиках их распределения местоположение данной кривой можно определить с помощью методов оптимизации с использованием функции Лагранжа (см. ниже, а также п. 2 и табл. 1).

Осуществим вывод уравнения касательной $y = y_{кас}$ к графику функции $y = y(x) = ax^2 + bx + c$. Для этого запишем выражения для тангенса угла α:

$$tg\,\alpha = \frac{y_{кас} - y_0}{x - x_0} \text{ и}$$

$$tg\,\alpha = \frac{y_{кас} - 0}{x - x_f},$$

где x_f — доходность безрискового актива.

Так как тангенс угла α равен также производной функции $y(x)$ в точке x_0: $\text{tg}\,\alpha = y'(x_0)$, то можно записать:

$$y_{кас} = y'(x_0)\cdot(x - x_0) + y_0, \qquad (1)$$

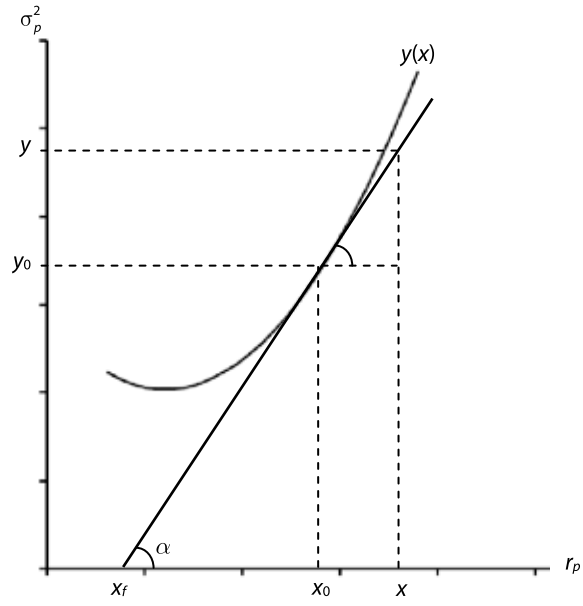


Рис. 1.

где $y_0 = y(x_0) = ax_0^2 + bx_0 + c; y'(x_0) = 2ax_0 + b$.

Также верно:

$$y_{кас} = y'(x_0)\cdot(x - x_f). \qquad (2)$$

Приравняем друг к другу выражения (1) и (2):

$$(2ax_0 + b)\cdot(x - x_0) + ax_0^2 + bx_0 + c = (2ax_0 + b)\cdot(x - x_f)$$

Перемножим скобки и приведем подобные члены:

$$-(2ax_0 + b)\cdot x_0 + ax_0^2 + bx_0 + c = -(2ax_0 + b)\cdot x_f$$

Теперь можно найти точку $(x_0; y_0)$ касания прямой $y_{кас}$ и графика $\sigma_p^2(r_p)$ через заранее задаваемые значения x_f. Имеем квадратное уравнение

$$ax_0^2 + 2ax_f \cdot x_0 - bx_f - c = 0.$$

Его корни:

$$x_0 = \frac{2a\cdot x_f \pm \sqrt{4a^2\cdot x_f^2 + 4a\cdot(b\cdot x_f + c)}}{2a}.$$

Так как корень

$$x_0 = \frac{2a\cdot x_f - \sqrt{4a^2\cdot x_f^2 + 4a\cdot(b\cdot x_f + c)}}{2a}$$

задает касательную к левой ветви параболы, которая уже не является частью эффективного фронта, будем считать данный корень посторонним.

Тогда имеем единственный корень:

$$x_0 = \frac{2a\cdot x_f + \sqrt{4a^2\cdot x_f^2 + 4a\cdot(b\cdot x_f + c)}}{2a}. \qquad (3)$$

Таблица 1

Расчет параметров границы допустимого множества портфелей

ψ	g_1	g_2	g_3	$\sum g_i$	r_p	σ_p^2
–23	–0,1582	1,14207	0,01608	1	6,21851	81,8883
–21	–0,1608	1,12352	0,03732	1	6,27582	80,7209
–19	–0,1635	1,10497	0,05856	1	6,33314	79,6596
–17	–0,1662	1,08642	0,07979	1	6,39045	78,7044
–15	–0,1689	1,06788	0,10103	1	6,44776	77,8554
–13	–0,1716	1,04933	0,12227	1	6,50507	77,1125
–11	–0,1743	1,03078	0,1435	1	6,56238	76,4757
–9	–0,1770	1,01223	0,16474	1	6,61970	75,9451
–7	–0,1797	0,99368	0,18598	1	6,67701	75,5206
–5	–0,1823	0,97513	0,20721	1	6,73432	75,2022
–3	–0,1850	0,95659	0,22845	1	6,79163	74,9899
–1	–0,1877	0,93804	0,24969	1	6,84894	74,8838
1	–0,1904	0,91949	0,27092	1	6,90625	74,8838
0	–0,1891	0,92876	0,26031	1	6,87760	74,8705
3	–0,1931	0,90094	0,29216	1	6,96357	74,9899
5	–0,1958	0,88239	0,31340	1	7,02088	75,2022
7	–0,1985	0,86384	0,33463	1	7,07819	75,5206
9	–0,2012	0,84530	0,35587	1	7,13550	75,9451
11	–0,2039	0,82675	0,37711	1	7,19281	76,4757
13	–0,2065	0,80820	0,39834	1	7,25013	77,1125
15	–0,2092	0,78965	0,41958	1	7,30744	77,8554
17	–0,2119	0,77110	0,44082	1	7,36475	78,7044
19	–0,2146	0,75255	0,46205	1	7,42206	79,6596
21	–0,2173	0,73401	0,48329	1	7,47937	80,7209
23	–0,2200	0,71546	0,50453	1	7,53668	81,8883
25	–0,2227	0,69691	0,52576	1	7,59400	83,1619
27	–0,2254	0,67836	0,54700	1	7,65131	84,5415
29	–0,2280	0,65981	0,56823	1	7,70862	86,0273
31	–0,2307	0,64126	0,58947	1	7,76593	87,6193
33	–0,2334	0,62272	0,61071	1	7,82324	89,3173
35	–0,2361	0,60417	0,63194	1	7,88056	91,1215
37	–0,2388	0,58562	0,65318	1	7,93787	93,0319
39	–0,2415	0,56707	0,67442	1	7,99518	95,0483

Зная x_0, находим вторую координату:

$$y_0 = ax_0^2 + bx_0 + c. \quad (4)$$

Коэффициенты a, b, c можно найти с помощью построения модели множественной регрессии σ_p^2 на r_p и r_p^2 или — в том случае, если график построен с помощью программного приложения, например, MS Excel — посредством выведения уравнения тренда на график $\sigma_p^2(r_p)$. Использование второго способа более привлекательно, однако оно предполагает нахождение местоположения точек в пространстве (r_p, σ_p^2), соответствующих эффективному множеству портфелей по Марковицу.

Для осуществления оптимизации (расчета координат точек, составляющих эффективную границу) введем линейное уравнение функции полезности агента

$$U = \psi r_p - \sigma_p^2,$$

в котором параметр неприятия риска ψ будем использовать как переменную, задающую положение (наклон) функции U, выступающей в данном случае в качестве критической линии к воображаемому эффективному фронту. Определение параметров риска и доходности портфеля для заданной функции полезности (заданного параметра ψ) осуществляется с использованием функции Лагранжа. Общий ход решения данной задачи можно проследить, например, в работе Л. С. Тарасевича, П. И. Гребенникова, А. И. Леусского [1, с. 173–174].

Покажем развернутое доказательство соответствующей модели.

Итак, при заданных параметрах распределения доходностей ценных бумаг (известных средних, стандартных отклонениях доходности каждой бумаги и корреляциях доходности), а также параметре неприятия риска ψ задача оптимизации сводится к решению условия

$$L = \psi r_p - \sigma_p^2 - \lambda\left(\sum_{j=1}^{N} g_j - 1\right) \to \max,$$

то есть определению структуры портфеля, максимизирующего функцию полезности.

Для примера с тремя ценными бумагами функция Лагранжа в развернутом виде запишется так:

$$\begin{aligned} L = {} & \psi(r_1 g_1 + r_2 g_2 + r_3 g_3) - (g_1^2\sigma_{11} + g_1 g_2\sigma_{12} + \\ & + g_1 g_3\sigma_{13} + g_2 g_1\sigma_{21} + g_2^2\sigma_{22} + g_2 g_3\sigma_{23} + \\ & + g_3 g_1\sigma_{31} + g_3 g_2\sigma_{32} + g_3^2\sigma_{33}) - \lambda g_1 - \lambda g_2 - \\ & - \lambda g_3 + \lambda, \end{aligned} \qquad (5)$$

где σ_{ij} — ковариации ценных бумаг i и j.

Отыщем первые частные производные функции L по g_1, g_2, g_3 и λ и приравняем их к нулю:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial g_1} &= \psi r_1 - 2g_1\sigma_{11} - g_2\sigma_{12} - g_3\sigma_{13} - \\ &\quad - g_2\sigma_{21} - g_3\sigma_{31} - \lambda = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial g_2} &= \psi r_2 - g_1\sigma_{12} - g_1\sigma_{21} - 2g_2\sigma_{22} - \\ &\quad - g_3\sigma_{23} - g_3\sigma_{32} - \lambda = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial g_1} &= \psi r_3 - g_1\sigma_{13} - g_2\sigma_{23} - g_1\sigma_{31} - \\ &\quad - g_2\sigma_{32} - 2g_3\sigma_{33} - \lambda = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} &= -g_1 - g_2 - g_3 + 1 = 0. \end{aligned} \qquad (6)$$

Заметим, что матрица ковариаций [**S**] симметрична относительно главной диагонали, то есть $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$, поэтому система (6) запишется в матричной форме следующим образом:

$$\begin{bmatrix} \partial L/\partial g_1 \\ \partial L/\partial g_2 \\ \partial L/\partial g_3 \\ \partial L/\lambda \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \psi r_1 \\ \psi r_2 \\ \psi r_3 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2g_1\sigma_{11} + 2g_2\sigma_{12} + 2g_3\sigma_{13} + \lambda \\ 2g_1\sigma_{21} + 2g_2\sigma_{22} + 2g_3\sigma_{23} + \lambda \\ 2g_1\sigma_{31} + 2g_2\sigma_{32} + 2g_3\sigma_{33} + \lambda \\ g_1 + g_2 + g_3 - 1 \end{bmatrix} = [0]. \quad (7)$$

Перенося единицу из нижней строки второго слагаемого в правой части уравнения (7) в первое слагаемое и представляя вычитаемую матрицу в виде произведения матрицы на столбец, получаем:

$$\begin{bmatrix} \psi r_1 \\ \psi r_2 \\ \psi r_3 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2\sigma_{11} & 2\sigma_{12} & 2\sigma_{13} & 1 \\ 2\sigma_{21} & 2\sigma_{22} & 2\sigma_{23} & 1 \\ 2\sigma_{31} & 2\sigma_{32} & 2\sigma_{33} & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ \lambda \end{bmatrix} = [0]. \quad (8)$$

Вектор $\mathbf{G} = (g_1, g_2, g_2, \lambda)^T$ определится следующим выражением:

$$\begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\sigma_{11} & 2\sigma_{12} & 2\sigma_{13} & 1 \\ 2\sigma_{21} & 2\sigma_{22} & 2\sigma_{23} & 1 \\ 2\sigma_{31} & 2\sigma_{32} & 2\sigma_{33} & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} \psi r_1 \\ \psi r_2 \\ \psi r_3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (9)$$

то есть

$$\begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & c_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & c_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \psi r_1 \\ \psi r_2 \\ \psi r_3 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (10)$$

Можно показать, что из уравнения (10) следует система:

$$\begin{cases} g_1 = c_1 + \psi(a_{11}r_1 + a_{12}r_2 + a_{13}r_3) \\ g_2 = c_2 + \psi(a_{21}r_1 + a_{22}r_2 + a_{23}r_3) \\ g_3 = c_3 + \psi(a_{31}r_1 + a_{32}r_2 + a_{33}r_3) \\ \lambda = c_4 + \psi(c_1r_1 + c_2r_2 + c_3r_3) \end{cases}. \quad (11)$$

Данный результат можно обобщить на произвольное число ценных бумаг, так что имеет место решение:

$$\begin{cases} g_1 = c_1 + \psi(a_{11}r_1 + \ldots + a_{1N}r_N) \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ g_N = c_N + \psi(a_{N1}r_N + \ldots + a_{NN}r_N) \\ \lambda \neq 0. \end{cases} \quad (12)$$

Варьируя параметр неприятия риска ψ, можно найти составляющие (структуру) эффективных портфелей ценных бумаг, а затем вычислить пары значений (r_p, σ_p^2) для данных портфелей.

Чтобы определить пропорции бумаг, образующих касательный портфель, используем свойство, согласно которому доли бумаг в портфеле линейно зависят от ψ[1].

Найдя (x_0, y_0), из расчетных данных, можно определить пару значений параметра пси: $(\psi^н, \psi^в)$, которые ограничивают снизу и сверху портфели, между которыми на кривой $\sigma_p^2(r_p)$ лежит касательный портфель.

Далее, пользуясь зависимостями $g_i(\psi)$ и применяя метод линейной интерполяции, можно найти доли бумаг в касательном портфеле.

Наконец, так как в данной работе зависимость между доходностью портфеля и риском исходно была представлена аналитически и графически в виде зависимости риска от доходности, предложим также аналитический вид уравнения касательной — эффективного множества с условием заимствования и кредитования по безрисковой ставке (линии рынка капитала)[2] — в виде обратной зависимости:

$$x_{кас} = x_0 + \frac{\sigma_p^2 - y_0}{2a \cdot x_0 + b}. \qquad (13)$$

Также должно выполняться:

$$x_{кас} = x_f + \frac{\sigma_p^2}{2a \cdot x_0 + b}. \qquad (14)$$

2. Числовой пример

Проиллюстрируем модель числовым примером.

1. Зададим распределение доходности для $N = 3$ ценных бумаг. Найдем параметры средних, стандартных отклонений и корреляций (табл. 2).

Таблица 2

Параметры средних, стандартных отклонений и корреляций

Номер ценной бумаги	r_i, %	σ_i, %	Corr(i, j)		
1	7,1	11,3	1		
2	6,3	9,0	0,7789	1	
3	9,1	12,6	0,6896	0,4935	1

[1] Данное свойство будет иметь силу при условии, что к структуре портфеля не применяются ограничения типа $\sum_{i=1}^{m} e_{ij} \cdot g_i = h_j, j = 1, 2, \ldots, m$, за исключением ограничения $\sum_{i=1}^{N} g_i = 1$. См. 3, с. 37–42].

[2] Отличие формул (13) и (14) от традиционного вида линии *CML* состоит в том, что в привычном нам виде эта зависимость строится от параметра риска, взятого не в виде дисперсии, а в виде среднего квадратичного отклонения.

2. Определим вид границы допустимого множества и эффективного фронта (выделенная жирным часть кривой) для случая, когда не предполагается возможность заимствования и кредитования по безрисковой ставке (рис. 2).

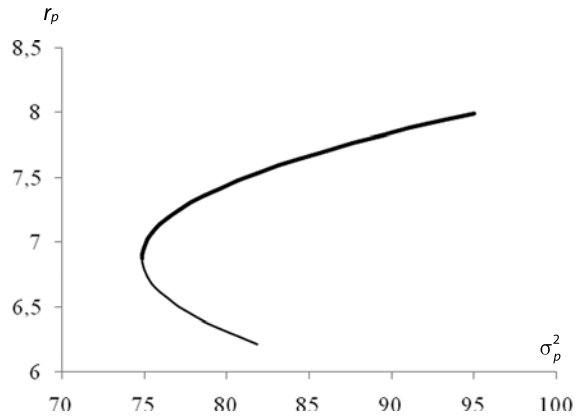


Рис. 2.

Таблица с расчетными значениями к данной и следующим иллюстрациям приводится в табл.1.

3. Покажем полученную зависимость в виде графика $\sigma_p^2(r_p)$ и построим уравнение данной зависимости как полином второй степени (рис. 3).

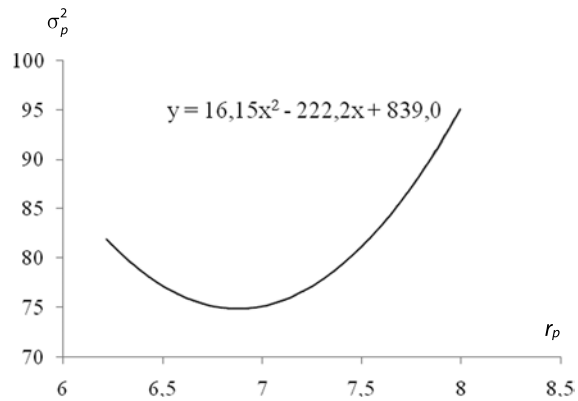


Рис. 3.

4. Введем некоторое значение безрисковой ставки: $r_f = 4{,}5\%$. Используя формулы (3) и (4), определим координаты точки касания графика $\sigma_p^2(r_p)$ и линии, проходящей через точку, соответствующую введенному значению r_f:

$$x_0 = \frac{2 \cdot 16{,}15 \cdot 4{,}5}{2 \cdot 16{,}15} + \frac{\sqrt{4 \cdot (16{,}15)^2 \cdot (4{,}5)^2 + 4 \cdot 16{,}15 \cdot (-222{,}2 \cdot 4{,}5 + 839)}}{2 \cdot 16{,}15} =$$

$$= 7{,}7074.$$

$$y_0 = 16{,}15 \cdot (8{,}684)^2 - 222{,}2 \cdot 8{,}684 + 839 = 85{,}7895.$$

$$(x_0, y_0) = (7{,}7074;\ 85{,}7895).$$

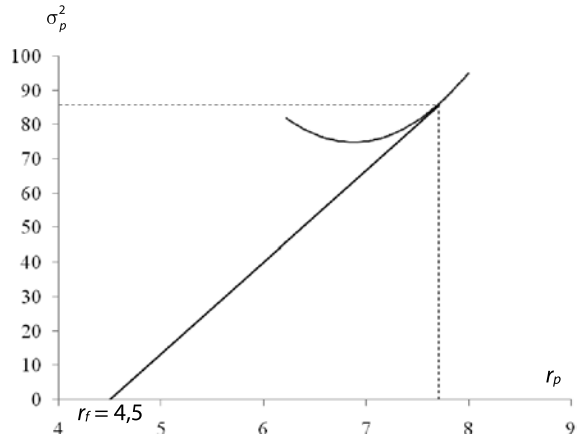


Рис. 4.

Отобразим линию касательной на рисунке 4. Также в силу формул (13) и (14) имеем:

$$x_{\text{кас}} = 7{,}7074 + \frac{\sigma^2 - 85{,}7895}{26{,}833} \text{ или}$$

$$x_{\text{кас}} = 4{,}5 + 0{,}0372675\sigma^2.$$

Данные уравнения являются аналитическими выражениями эффективного множества для случая с условием заимствования и кредитования по безрисковой ставке, то есть формулами линии рынка капитала (уравнениями *CML*).

5. Определим структуру касательного портфеля.

Находим значения параметра неприятия риска, ограничивающие касательный портфель: $(\psi^{\text{н}}, \psi^{\text{в}}) = (28, 29)$.

Перед тем, как проводить интерполяцию, покажем графически, что величина доли ценной бумаги *j* в эффективном портфеле при наших предположениях линейно зависит от параметра ψ (рис. 5).

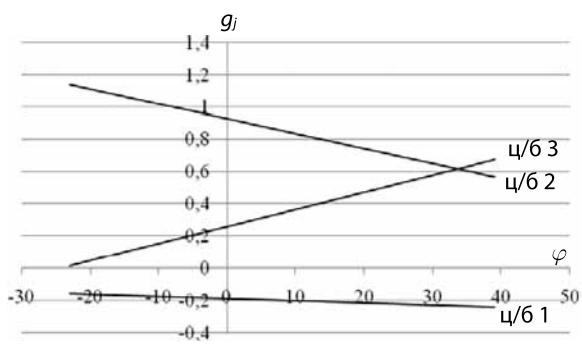


Рис. 5.

Далее рассчитываем значения долей ценных бумаг, соответствующие нижней и верхней границам параметра ψ, и проводим интерполяцию:

$$g_1^{\text{н}} = -0{,}226702509;$$

$$g_1^{\text{в}} = -0{,}228046595;$$

$$g_1 = \frac{-0{,}226702509 - 0{,}228046595}{2} = -0{,}227374552.$$

$$g_2^{\text{н}} = 0{,}669086022;$$

$$g_2^{\text{в}} = 0{,}659811828;$$

$$g_2 = \frac{0{,}669086022 + 0{,}659811828}{2} = 0{,}664448925.$$

$$g_3^{\text{н}} = 0{,}557616487;$$

$$g_3^{\text{в}} = 0{,}568234767;$$

$$g_3 = \frac{0{,}557616487 + 0{,}568234767}{2} = 0{,}562925627.$$

Проверка суммы полученных долей свидетельствует о корректности расчетов:

$$\sum g_i = -0{,}227374552 + 0{,}664448925 + 0{,}562925627 = 1.$$

Наконец, рассчитаем параметры риска и доходности касательного портфеля:

$$rp = 7{,}6943\%,$$

$$\sigma_p^2 = 85{,}6459,\ \sigma = 9{,}2545\%.$$

Список источников

1. *Тарасевич Л. С., Гребенников П. И., Леусский А. И.* Макроэкономика : учебник; 6-е изд., испр. и доп. — М.: Высшее образование, 2006. — 654 с.

2. *Шарп У., Александер Г., Бэйли Дж.* Инвестиции. — М.: Инфра-М., 1998.

3. *Шведов А. С.* Теория эффективных портфелей ценных бумаг. — М.: ГУ ВШЭ, 1999. — 142 с.

4. *Elton E. J., Gruber M. J., Padberg M. D.* Simple Criteria for Optimal Portfolio Selection // Journal of Finance. — 1976. — No 5 (december). — P. 1341-1357.

5. *Markowitz H. M.* Portfolio Selection // Journal of Finance. — 1952. — No 1(march). — P. 77-91.

6. *Markowitz H. M.* The Optimization of the Quadratic Function Subject to Linear Constraints // Naval Research Logistic Quarterly. — 1956. — No 3, nos. 1-2 (march — june). — P. 111-133

7. *Sharpe W. F.* A Simplified Model for Portfolio Analysis // Management Science. — 1963. — No 2 (january). — P. 277-293.

8. *Tobin J.* Liquidity Preference as Behaviour Towards Risk // Review of Economic Studies. — 1958. — No 26 (february). — P. 65-86.

9. *Tobin J.* The Theory of Portfolio Selection // The Theory of Interest Rates / Ed. F. H. Hahn, F. P. R. Brechling. — London: Macmillan and Co, 1965.

УДК 336.76

ключевые слова: теория инвестиционного портфеля, инвестиционный анализ, оптимизация портфеля, ценообразование на рынке капитала