ЖУРНАЛ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ №2/2012

# МАКРОЭКОНОМИКА С НУЛЕВЫМ ХИМИЧЕСКИМ ПОТЕНЦИАЛОМ

**Д. Н. Качевский**

*В рамках термодинамического подхода к макроэкономике для идеальной макроэкономической системы, подчиняющейся статистике Бозе — Эйнштейна с нулевым химическим потенциалом, построено уравнение состояния системы. Показано, что экономика США XX в. подчиняется этой статистике и удовлетворяет полученному уравнению состояния. Показано, что федеральный бюджет США имеет кластерную структуру, при этом каждый из трех кластеров соответствует определенному темпу падения рентабельности при росте затратной части федерального бюджета. С течением времени темп этого падения увеличивается.*

## Введение

В рамках термодинамического подхода к описанию макроэкономических систем (МКЭС) [2], рассматривается идеальная равновесная Бозе — МКЭС для случая, когда изменение числа предприятий $N$ системы не связано с работой системы, а значит, химический потенциал $\mu = 0$. При этом первое начало термодинамики в общем случае представляется в обычной форме $\delta Q = \delta U + \delta A - \mu dN$, т. е. малое увеличение тепла в системе на величину $\delta Q = RdS$ приводит к увеличению внутренней энергии системы $dU$, к работе системы по увеличению $C$ — объема рынка (спроса) $\delta A = DdC$ и работе системы $-\mu dN$ по изменению числа предприятий $N$. Здесь $D = N/x_r$ — деловая активность, число предприятий на единицу совокупных затрат МКЭС при работе в режиме максимальной рентабельности (о возможности работы системы в режиме максимальной рентабельности, см. [1]); под количеством тепла МКЭС понимается совокупность экономических и информационных свобод; $R = y_r/x_r$ — абсолютная рентабельность инвестиций, $y_r$ — совокупный доход МКЭС, $x_r$ — совокупные затраты МКЭС в режиме максимальной рентабельности.

Энергия каждого предприятия принимается в виде $\varepsilon = (-p/m)^n/n$ с каноническим импульсом $p$, отрицательное значение которого связано с уменьшением канонической координаты $q$ — ошибки инвестирования, в процессе выравнивания при стремлении системы к максимальному значению рентабельности инвестиций. Значения иерархического параметра первоначально ограничены условием $n > 0$, $m$ — инерционность оптимизации ($m > 0$).

## 1. Статистические закономерности и распределение макроэкономики

Методы термодинамики, распространенные на макроэкономические системы, дают возможность феноменологически связать между собой совокупность макроэкономических параметров, выявляя их общую природу, однако не дают возможности установить вид уравнений состояния МКЭС, их генетическую связь как с законами микроэкономики и с закономерностями, управляющими системами с большим числом микроэкономических объектов — статистическими закономерностями.

Описание статистических закономерностей производится с помощью установления вероятностных распределений основных микроэкономических параметров предприятий, взаимодействующих или не взаимодействующих между собой, так и с макросистемой, которую они образуют. Одним из основных таких параметров является внутренняя энергия $i$-ого предприятия, которая может быть представлена функцией Гамильтона с каноническими переменными $p$, $q$ — обобщенным импульсом и обобщенной координатой, описывающими микросостояние предприятия.

Для идеальной системы невзаимодействующих предприятий внутреннюю энергию выбираем в форме

$$\varepsilon = H(p_i, q_i) = (-p_i/m)^n/n. \qquad (1.1)$$

Совокупность микросостояний всех предприятий представляют микросостояние МКЭС. Каждое такое микросостояние характеризуется

вероятностным распределением энергии предприятий, однако не все изменения микросостояний МКЭС приводят к изменению этого распределения.

Действительно, функция Гамильтона, зависящая от обобщенных координат и импульсов, вообще говоря, может оставаться инвариантной для большого класса их преобразований. Кроме того, имеют место тождественность и неразличимость предприятий с точки зрения их вклада в распределение, т. е. если одно предприятие изменило свою энергию за счет изменения своего микросостояния, другое предприятие в силу тех же причин может приобрести такую же энергию при этом доля предприятий с заданным значением энергии может не измениться.

Принимая во внимание, что макроэкономическая система состоит из бесконечно большого числа предприятий ($N \to \infty$), вводится основной постулат статистической макроэкономики: *то распределение, которое соответствует наибольшему числу микросостояний МЕЭС и является термодинамически равновесным распределением.* Постулат обосновывается тем, что замкнутая макросистема основную часть своего времени оказывается именно в равновесном состоянии, выход же из этого состояния рассматривается как флуктуация.

Знание распределения предприятий по энергии $n_i(\varepsilon)$ дает возможность, во-первых, найти среднее значение энергии предприятия

$$\bar{\varepsilon} = \sum_{i=1}^{N} n_i(\varepsilon)\varepsilon_i, \qquad (1.2)$$

во-вторых, внутреннюю энергию макросистемы

$$U = N\bar{\varepsilon}. \qquad (1.3)$$

Дальнейшее применение методов термодинамики дает возможность получить уравнения состояния макроэкономической системы.

## 2. Распределение Бозе — Эйнштейна в макроэкономике

Рассмотрим задачу отыскания наиболее вероятного распределения по энергии для макроэкономической системы тождественных неразличимых предприятий.

Введем понятие фазового $\mu$-пространства как пространства двух измерений, соответствующих обобщенным координатам $q$ и импульсам $p$, которые с течением времени могут изменяться. Элементом фазового объема назовем выражение

$$d\Gamma = dqdp. \qquad (2.1)$$

Каждая точка фазового пространства представляет собой возможную пару значений параметров ($q$, $p$), описывающих микросостояние предприятия. Если значения параметров меняются со временем, то точка фазового пространства описывает некоторую траекторию. Энергия, соответствующая этим параметрам, сохраняет свое значение в предположении невзаимодействующих предприятий.

Поскольку параметры изначально могут принимать произвольные значения, то соответствующая точка фазового пространства также может располагаться произвольным образом, каждый раз соответствуя тому или иному значению энергии.

Разобьем все фазовое пространство на некоторые области — «ящики» и «ячейки», соответствующие определенным значениям энергии. Каждый $i$-й ящик соответствует с некоторой точностью энергии $\varepsilon_i$ ($i$-й энергетический уровень). Размеры таких ящиков в фазовом пространстве могут принимать различные с точки зрения координат и импульсов значения, т. е. ящики не являются равновеликими. Сами же ящики разобьем на равновеликие объемом $h$ ячейки с числом ячеек $g_i$.

Такое разбиение фазового пространства на энергетические ящики и ячейки подразумевает, что фазовый объем энергетического ящика может определяться с точностью не менее фазового объема одной ячейки $h$, другими словами, имеет место соотношение неопределенности в измерении фазовых объемов

$$\Delta p \Delta q \geq \mathrm{h}, \qquad (2.2)$$

где $\Delta$ означает погрешность измерения соответствующей величины-импульса или координаты, $h$ — экономическая постоянная Планка.

Рассмотрим $i$-й энергетический ящик, в котором может «располагаться» $N_i$ число предприятий, распределенных произвольным образом по $g_i$ ячейкам. Числом возможных таких размещений $W_i$, отличающихся только количеством предприятий в ячейках, является число сочетаний из ($N_i + g_i - 1$) — числа предприятий и «перегородок» между ячейками $i$-го ящика, по числу перегородок ($g_i - 1$):

$$W_i = \frac{(N_i + g_i - 1)!}{N_i!\,(g_i - 1)!}. \qquad (2.3)$$

Для множества таких ящиков числом размещений, очевидно, будет

$$W=\prod_i \frac{(N_i+g_i-1)!}{N_i!\,(g_i-1)!}. \qquad (2.4)$$

Число размещений, таким образом, зависит от числа предприятий $N_i$, попадающих в $i$-й энергетический ящик. Полагая, что общее число предприятий

$$N=\sum_i N_i, \qquad (2.5)$$

а их полная энергия равна

$$U=\sum_i N_i\varepsilon_i, \qquad (2.6)$$

найдем распределение $N$ предприятий по всем энергетическим ящикам, соответствующее максимальному числу возможных размещений $W$, при заданных дополнительных условиях (2.5) и (2.6), фиксирующих общее число предприятий и их полную энергию. Это распределение и будет наиболее вероятным распределением, а значит, и термодинамически равновесным. Этим распределением является известное распределение Бозе — Эйнштейна

$$N_i=\frac{g_i}{\exp(-\alpha+\beta\varepsilon_i)-1}. \qquad (2.7)$$

Рассмотренная постановка задачи определения термодинамически равновесных распределений вместе с возможностью существования ее единственного решения говорит о фундаментальности задачи, которая фактически указывает на необходимость квантования (дискретизации) фазового пространства экономических параметров. Впервые о необходимости квантования пространства экономических параметров было высказано в работе [3], в которой была реализована идея последовательного квантования в микроэкономике.

Для придания экономического смысла параметрам $\alpha$, $\beta$ заметим сходство введенного ранее термодинамического понятия энтропии $S$ как аддитивного экстенсивного внешнего параметра макроэкономической системы, принимающего свое максимальное значение при термодинамическом состоянии равновесия с логарифмом числа возможных размещений $W$ предприятий по энергетическим ящикам

$$\ln W=\sum_i \ln\frac{(N_i+g_i-1)!}{N_i!\,(g_i-1)!}, \qquad (2.8)$$

также являющегося величиной аддитивной и принимающей свое максимальное значения в состоянии термодинамического равновесия. Таким образом, эти две величины с точностью до мультипликативного постоянного множителя $k$ ($k$ — экономическая постоянная Больцмана) должны совпадать (принцип Больцмана):

$$S = k\ln W. \qquad (2.9)$$

Используя приближенную формулу Стирлинга

$$N!\approx N\ln N,\ (N\to\infty), \qquad (2.10)$$

для энтропии получаем значение

$$\frac{S}{k}=\sum_i g_i\left[(n_i+1)\ln(n_i+1)-n_i\ln n_i\right];\ \left(n_i\equiv\frac{N_i}{g_i}\right), \qquad (2.11)$$

где числа заполнения $n_i$ представляют собой среднее число предприятий $i$-го энергетического ящика, расположенных в одной ячейке.

Учитывая, формулы (2.5), (2.6), (2.7) и записывая их с помощью чисел заполнения,

$$N=\sum_i N_i=\sum_i g_i n_i, \qquad (2.12)$$

$$U=\sum_i N_i\varepsilon_i=\sum_i g_i n_i\varepsilon_i, \qquad (2.13)$$

$$n_i=\frac{1}{\exp(-\alpha+\beta\varepsilon_i)-1}, \qquad (2.14)$$

энтропию равновесного состояния макроэкономической системы запишем в виде

$$\frac{S}{k}=\beta U-\alpha N-\sum_i g_i\ln\left(1-\exp(\alpha-\beta\varepsilon_i)\right). \qquad (2.15)$$

Используя первое начало термодинамики, записанное с учетом работы МКЭС по изменению числа предприятий системы $N$ ($\mu$ — химический потенциал)

$$dU = -DdC + RdS + \mu dN, \qquad (2.16)$$

полный дифференциал энтропии можно представить в виде

$$dS(C,U,N)=\frac{D}{R}\,dC+\frac{1}{R}\,dU-\frac{\mu}{R}\,dN. \qquad (2.17)$$

Найдем теперь полный дифференциал энтропии с помощью формулы (2.15):

$$\frac{dS}{k}=\beta dU+Ud\beta-\alpha dN-Nd\alpha-$$
$$-\sum_i\left[\ln\left(1-e^{\alpha-\beta\varepsilon_i}\right)dg_i-\frac{g_i\left(d\alpha-\varepsilon_i d\beta-\beta d\varepsilon_i\right)}{\exp(-\alpha+\beta\varepsilon_i)-1}\right].$$

Учитывая, что энергетические уровни $\varepsilon_i$ и число ячеек в них $g_i$ не зависят от общего числа

предприятий $N$ и внутренней энергии $U$, с использованием формул (2.12–2.14) полученное выражение может быть упрощено:

$$dS = k\sum_i \left[\frac{-\beta g_i\, d\varepsilon_i/dC}{\exp(-\alpha+\beta\varepsilon_i)-1} - \frac{dg_i}{dC}\ln\left(1-e^{\alpha-\beta\varepsilon_i}\right)\right]dC + \\ + k\beta dU - k\alpha dN. \quad (2.18)$$

Сравнивая полученное выражение с формулой (2.17), находим экономическое содержание коэффициентов $\alpha$, $\beta$:

$$\alpha = \frac{\mu}{kR},\ \beta = \frac{1}{kR}. \quad (2.19)$$

Таким образом, распределение Бозе — Эйнштейна записывается в виде

$$N_i = \frac{g_i}{\exp\left(\frac{\varepsilon_i-\mu}{kR}\right)-1}, \quad (2.20)$$

а дополнительные условия, фиксирующие общее число предприятий и их полную энергию, в виде

$$N = \sum_i \frac{g_i}{\exp\left(\frac{\varepsilon_i-\mu}{kR}\right)-1}, \quad (2.21)$$

$$U = \sum_i \frac{g_i\ \varepsilon_i}{\exp\left(\frac{\varepsilon_i-\mu}{kR}\right)-1}. \quad (2.22)$$

Поскольку энергетические уровни равновесных распределений могут располагаться энергетически достаточно близко друг к другу, суммирование по уровням с практической точки зрения, можно заменить интегрированием по фазовому пространству обобщенных координат, сделав замену числа ячеек $gi$ на величину $d\Gamma/h$ с введением весового множителя $g$, учитывающего возможность вырождения уровней по возможным дополнительным параметрам:

$$g_i \mapsto g\frac{d\Gamma}{h} = g\frac{dqdp}{h}. \quad (2.23)$$

В этом случае равновесное статистические распределение Бозе — Эйнштейна будет иметь вид:

$$dN = \frac{g}{h}\frac{d\Gamma}{e^{(\varepsilon-\mu)/kR}-1}, \quad (2.24)$$

$$N = \frac{g}{h}\int \frac{d\Gamma}{e^{(\varepsilon-\mu)/kR}-1}, \quad (2.25)$$

$$U = \frac{g}{h}\int \frac{\varepsilon d\Gamma}{e^{(\varepsilon-\mu)/kR}-1}, \quad (2.26)$$

$$\varepsilon = H(p,q) = \frac{1}{n}\left(-\frac{p}{m}\right)^n, \quad (2.27)$$

а равновесную систему, подчиняющуюся статистике Бозе — Эйнштейна, будем называть бозе-МКЭС.

Из формулы (2.25) находим выражение для химического потенциала

$$e^{\mu/kR} = \frac{Nh}{g\int e^{-\varepsilon/kR}d\Gamma}. \quad (2.28)$$

Интеграл знаменателя вычислим отдельно, учитывая, что импульс $p$, являясь величиной отрицательной, может принимать произвольные значения, а обобщенная координата $q \equiv |x - x_r|$ принимает положительные значения, ограниченные $C$ — объемом рынка (совокупным спросом МКЭС):

$$J = \int e^{-\frac{\varepsilon}{kR}}d\Gamma = \int_0^C dq \int_{-\infty}^0 e^{\frac{-(-\frac{p}{m})^n}{nkR}}dp = \\ = \frac{mC}{n}(nkR)^{1/n}\int_0^\infty \frac{x^{\frac{1}{n}-1}\,dx}{\exp(x)} = \frac{mC}{n^{1-1/n}}(kR)^{1/n}\Gamma\left(\frac{1}{n}\right), \quad (2.29)$$

здесь интегрирование проводится по переменной

$$x = \frac{1}{nkR}\left(-\frac{p}{m}\right)^n. \quad (2.30)$$

Поскольку энтропия равновесного состояния макроэкономической системы имела вид (2.15), для найденных значений параметров $\alpha = \frac{\mu}{kR}, \beta = \frac{1}{kR}$, может быть представлена в виде

$$\frac{S}{k} = \frac{U}{kR} - \frac{\mu N}{kR} - \sum_i g_i \ln\left(1-\exp(\frac{\mu-\varepsilon_i}{kR})\right), \quad (2.31)$$

и после перехода от суммирования по уровням к интегрированию по всему фазовому пространству обобщенных координат, с заменой числа ячеек $g_i$ на величину $d\Gamma/h$ и введением весового множителя $g$, учитывающего возможность вырождения уровней по возможным дополнительным параметрам:

$$g_i \mapsto g\frac{d\Gamma}{h} = g\frac{dqdp}{h},$$

энтропия равновесного состояния макроэкономической системы принимает вид

$$S = \frac{U}{R} - \frac{\mu N}{R} - \frac{kg}{h}\int \ln\left(1-e^{(\mu-\varepsilon)/kR}\right)d\Gamma. \quad (2.32)$$

С учетом известных соотношений для термодинамических потенциалов

$$F = U - RS;\ \Phi = U - RS + DC;$$
$$\Omega = F - \Phi = -DC;\ \Phi = \mu N,$$

имеет место равенство

$$\Omega = U - RS - \Phi = \frac{kgR}{h}\int \ln\left(1 - e^{(\mu-\varepsilon)/kR}\right) d\Gamma \quad (2.33)$$

и следующее из него уравнение состояния Бозе — МКЭС

$$DC = -\frac{kgR}{h}\int \ln\left(1 - e^{(\mu-\varepsilon)/kR}\right) d\Gamma. \quad (2.34)$$

Рассмотрим ситуацию, когда общее число предприятий макроэкономической системы не фиксировано. Одни предприятия по разным причинам перестают функционировать, другие могут открываться, при этом работа МКЭС по созданию новых предприятий, так же как и работа по их закрытию $\mu dN$, пренебрежимо мала. В этом случае химический потенциал следует считать равным нулю, как и потенциал Гиббса Ф, в соответствии с формулой

$$\mu = 0;\ \Phi = \mu N = 0. \quad (2.35)$$

По-прежнему полагая, что для идеальной МКЭС энергия предприятий имеет вид

$$\varepsilon = \frac{1}{n}\left(-\frac{p}{m}\right)^n,\ (n > 0), \quad (2.36)$$

в соответствии с формулой (2.26) для распределения Бозе — Эйнштейна, внутренняя энергия системы представляется в виде

$$U = \frac{g}{h}\int \frac{\varepsilon d\Gamma}{e^{(\varepsilon-\mu)/kR} - 1} = \frac{g}{h}\int_0^C dq \int_{-\infty}^0 \frac{(1/n)(-p/m)^n\, dp}{\exp\left(\dfrac{(-p/m)^n}{nkR}\right) - 1}. \quad (2.37)$$

Здесь учтено, что импульс $p$, являясь величиной отрицательной, может принимать произвольные значения, а обобщенная координата $q$ (ошибка инвестирования) принимает положительные значения, ограниченные $C$ — объемом рынка (совокупным спросом МКЭС), интегрирование проводится по всему фазовому объему, при условии $\mu = 0$:

$$U = \frac{Cmg(kR)^{1+1/n}}{hn^{1-1/n}}\int_0^\infty \frac{x^{1/n}\, dx}{e^x - 1} = \frac{Cmg(kR)^{1+1/n}}{hn^{1-1/n}}\Gamma\left(1+\frac{1}{n}\right)\zeta\left(1+\frac{1}{n}\right). \quad (2.38)$$

с переходом к новой переменной

$$x = \frac{1}{nkR}\left(-\frac{p}{m}\right)^n. \quad (2.39)$$

Для нахождения энтропии макроэкономической системы воспользуемся формулой (2.32)

$$S = \frac{U}{R} - \frac{kg}{h}\int \ln\left(1 - \exp\left(\frac{-\varepsilon}{k\ R}\right)\right) d\Gamma = \frac{U}{R} - \frac{kg}{h}\left[\int_0^C dq \int_{-\infty}^0 \ln\left(1 - \exp\left(-\frac{(-p/m)^n}{n\ k\ R}\right)\right) dp\right]. \quad (2.40)$$

Интегрирование по импульсу проводим по частям, учитывая, что внеинтегральный член обращается в нуль, как на верхнем, так и на нижнем пределах. С учетом равенства нулю химического потенциала, после сравнения полученного интеграла с формулой (2.38), для энтропии получаем выражение

$$\begin{aligned} S &= \frac{U}{R} - \frac{kgCm(kR)^{1/n}}{hn^{1-1/n}}\left[\int_0^\infty x^{-1+1/n} \ln\left(1 - \exp(-x)\right) dx\right] = \\ &= \frac{U}{R} - \frac{kgCm(kR)^{1/n}}{hn^{-1/n}}\left[\int_0^\infty \ln\left(1 - e^{-x}\right) dx^{1/n}\right] = \\ &= \frac{U}{R} - \frac{kgCm(kR)^{1/n}}{hn^{-1/n}}\left[-\int_0^\infty \frac{x^{1/n}}{1 - e^{-x}} e^{-x} dx\right] = \\ &= \frac{U}{R} + \frac{n}{R}\frac{gCm(kR)^{1+1/n}}{hn^{1-1/n}}\left[\int_0^\infty \frac{x^{1/n}}{e^x - 1} dx\right] = \frac{U}{R}(1+n) = \\ &= \frac{(1+n)Cmg(kR)^{1+1/n}}{R\ h\ n^{1-1/n}}\Gamma\left(1+\frac{1}{n}\right)\zeta\left(1+\frac{1}{n}\right). \end{aligned} \quad (2.41)$$

Из полученной формулы следует, что с ростом абсолютной рентабельности $R$, энтропия системы также растет. Максимальное значение одного из этих параметров приводит к максимальному значению другого.

Учитывая связи термодинамических потенциалов (4.6),

$$F = U - RS;\ \Omega = F - \Phi = -DC \quad (2.42)$$

для $\Omega$ — потенциала находим выражение

$$\Omega = U - RS = -DC, \quad (2.43)$$

а после подстановки найденных значений внутренней энергии и энтропии, находим уравнение состояния идеальной Бозе — МКЭС при $\mu = 0$

$$DC = Un, \quad (2.44)$$

или

$$D = \frac{mg(kR)^{1+1/n}}{hn^{-1/n}}\Gamma\left(1+\frac{1}{n}\right)\zeta\left(1+\frac{1}{n}\right). \quad (2.45)$$

В полученном уравнении состоянии Бозе — МКЭС отсутствует совокупный спрос $C$, при этом деловая активность $D$ не зависит от сово-

купного спроса, а из внешних параметров системы, определяющих деловую активность, является лишь абсолютная рентабельность $R$.

Теплоемкость при постоянном совокупном спросе макроэкономической системы принимает значение

$$C_C = \frac{RdS}{dR}\Big|_{C=const} = \frac{\partial U}{\partial R}\Big|_{C=const} = \frac{S}{n} = \\ = \frac{(1+n)Cmg(kR)^{1+1/n}}{Rhn^{2-1/n}}\Gamma\left(1+\frac{1}{n}\right)\zeta\left(1+\frac{1}{n}\right), \quad (2.46)$$

и, зависит от абсолютной рентабельности $R$.

Для числа предприятий МКЭС при рассматриваемом случае $\mu = 0$ имеет место выражение

$$N = \frac{g}{h}\int \frac{d\Gamma}{e^{\varepsilon/kR}-1}. \quad (2.47)$$

Интегрирование по всему фазовому пространству приводит к выражению

$$N = \frac{g}{h}\int_0^C dq \int_{-\infty}^0 \frac{dp}{\exp\left(\frac{(-p/m)^n}{nkR}\right)-1} = \\ = \frac{Cmg}{h}\ \frac{(kR)^{1/n}}{n^{1-1/n}}\int_0^\infty \frac{x^{-1+1/n}dx}{e^x-1}, \quad (2.48)$$

где

$$x = \frac{1}{nkR}\left(-\frac{p}{m}\right)^n. \quad (2.49)$$

После подстановки интеграла окончательно получаем выражение для общего числа предприятий МКЭС

$$N = \frac{Cmg}{h}\frac{(k\ R)^{1/n}}{n^{1-1/n}}\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\zeta\left(\frac{1}{n}\right), \quad (2.50)$$

откуда, с учетом свойств дзета-функции Римана $\zeta(\ldots)$, следует ограничение значений иерархического параметра

$$0 < n < 1, \quad (2.51)$$

а также зависимость совокупного спроса от абсолютной рентабельности

$$C = \frac{nhN}{mg\left(nkR\right)^{1/n}\Gamma\left(1/n\right)\zeta\left(1/n\right)}. \quad (2.52)$$

Рост рентабельности, таким образом, при прочих равных значениях параметров, сопровождается падением совокупного спроса. Это может объясняться тем, что рост рентабельности обычно сопровождается уменьшением затрат,

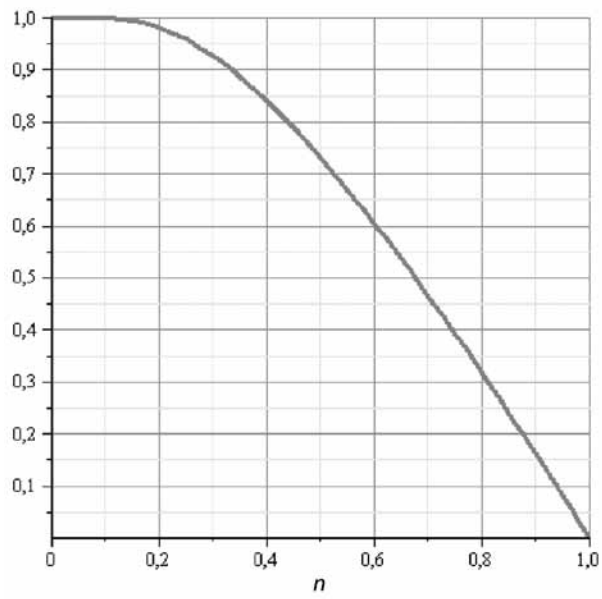



**Рис. 1.** *График зависимости от n* (0 < *n* < 1) *отношения дзета-функций* $\zeta\left(1+1/n\right)\Big/\zeta\left(1/n\right)$

экономией средств, понижением спроса предприятий на продукцию других предприятий.

Разделив выражения (2.50) на (2.52), получаем еще одну форму уравнения состояния идеальной Бозе — МКЭС при $\mu = 0$

$$DC = kNR\,\zeta\left(1+1/n\right)\Big/\zeta\left(1/n\right). \quad (2.53)$$

Уравнение может быть представлено в форме

$$DC = k_0 NR \quad (2.54)$$

с модифицированной экономической постоянной Больцмана $k_0$, которая определяется после перенормировки экономической постоянной Больцмана $k$:

$$k_0 \equiv k\,\varsigma\left(1+1/n\right)\Big/\zeta\left(1/n\right). \quad (2.55)$$

Отношение дзета-функций Римана $\zeta\left(1+1/n\right)\Big/\zeta\left(1/n\right)$ можно представить графически на рис. 1.

Из уравнения состояния Бозе — МКЭС в форме (2.54) вытекает экономический смысл модифицированной постоянной Больцмана $k_0$ как обратной величины конкурентоспособности МКЭС, которая определяется как отношение $y_r/C$:

$$DC = k_0 NR \Rightarrow \frac{N}{x_r}C = k_0 N\frac{y_r}{x_r} \Rightarrow k_0 = \frac{C}{y_r}. \quad (2.56)$$

### 3. Кластерная структура федерального бюджета США как пример иерархии идеальной равновесной Бозе — МКЭС с химическим потенциалом $\mu = 0$

Предполагаем, что экономика США в течение XX в. представляла собой идеальную равновесную Бозе — МКЭС с нулевой работой системы по изменению числа предприятий $N$, а следовательно, с равным нулю химическим потенциалом $\mu$. Тогда в силу первого начала термодинамики

$$\delta Q = dU + \delta A, \qquad (3.1)$$

малое увеличение тепла в системе на величину $\delta Q$ приводит к росту внутренней энергии на величину $dU$, а также к тому, что система совершает положительную работу по увеличению объема рынка (спроса) $\delta A = DdC$, но не совершает работы по созданию новых предприятий $-\mu dN = 0$.

Рассматриваем ситуацию, при иерархическом параметре $n > 0$, когда энергия каждого предприятия имеет вид

$$\varepsilon = \frac{1}{n}\left(-\frac{p}{m}\right)^n, \qquad (3.2)$$

тогда, согласно результатам предыдущего параграфа, уравнение состояния МКЭС не зависит от совокупного спроса $C$ и представляется в виде (2.53)

$$D = \frac{mg(kR)^{1+1/n}}{hn^{-1/n}}\Gamma\left(1+\frac{1}{n}\right)\zeta\left(1+\frac{1}{n}\right). \qquad (3.3)$$

Здесь деловая активность $D$ определена, согласно (1.2) как число предприятий системы, приходящихся на единицу совокупных затрат $x_r$ при работе системы в режиме максимальной рентабельности

$$D \equiv \frac{N}{x_r}. \qquad (3.4)$$

Перепишем уравнение состояния МКЭС в виде

$$D = \beta R^{1+1/n},\ \beta \equiv \frac{mgk^{1+1/n}}{hn^{-1/n}}\Gamma\left(1+\frac{1}{n}\right)\zeta\left(1+\frac{1}{n}\right), \qquad (3.5)$$

и после его логарифмирования представим в линейной форме (в дважды логарифмических координатах):

$$\ln R = \frac{n}{n+1}\ln\nu - \frac{n}{n+1}\ln x_r,\ \left(\nu \equiv \frac{N}{\beta}\right). \qquad (3.6)$$

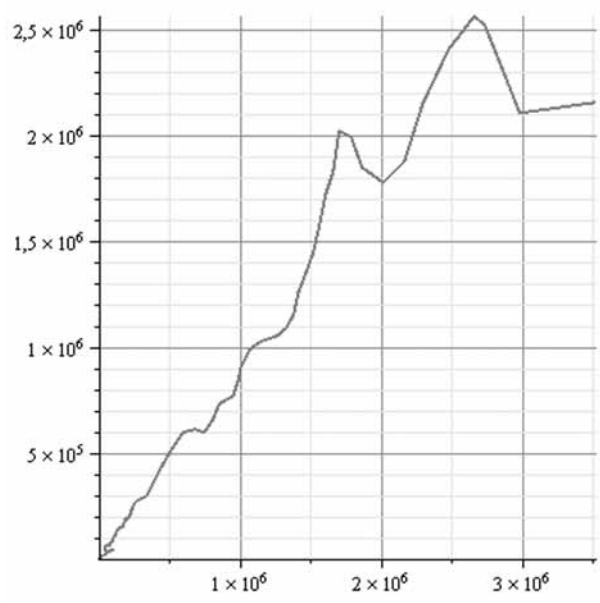



**Рис. 2.** *Динамика федерального бюджета США с 1901 по 2010 гг. По оси ординат $y_r$ — доходная часть бюджета (млн долл.), по оси абсцисс $x_r$ — расходная его часть (млн долл.)*

Поскольку МКЭС, по предположению, находится в состоянии равновесия (или в равновесном процессе выравнивая), производственные единицы — предприятия, группы предприятий, функционируют с одинаковой рентабельностью, совпадающей с рентабельность самой МКЭС, для проверки соотношения (3.6) воспользуемся данными федерального бюджета США, его доходной и расходной составляющими. Так на рис. 3.1 представлен график зависимости совокупного дохода федерального бюджета США $y_r$ от совокупных затрат $x_r$ в млн долл. в период с 1900–2010 гг. $y_r(x_r)$.

Для проверки соотношения (3.6), по данным приведенного рисунка построим график зависимости $\ln x_r$ от $\ln R$, где $R \equiv y_r / x_r$ — абсолютная рентабельность инвестиций. График представлен на рис. 3. Верхний график соответствует временной связи вершин (показывает временную последовательность вершин, одна вершина — один годовой бюджет). Нижний график представляет только вершины (без их временной связи).

Из нижнего графика рис. 3 следует, что точки (соответствующие годовым бюджетам) располагаются вдоль некоторых выделенных направлений, образуя наклонные кластеры, которые можно изобразить с помощью полос рис. 4. Тот факт, что полосы пересекаются, указывает на то, что МКЭС в точках пересечения одновременно

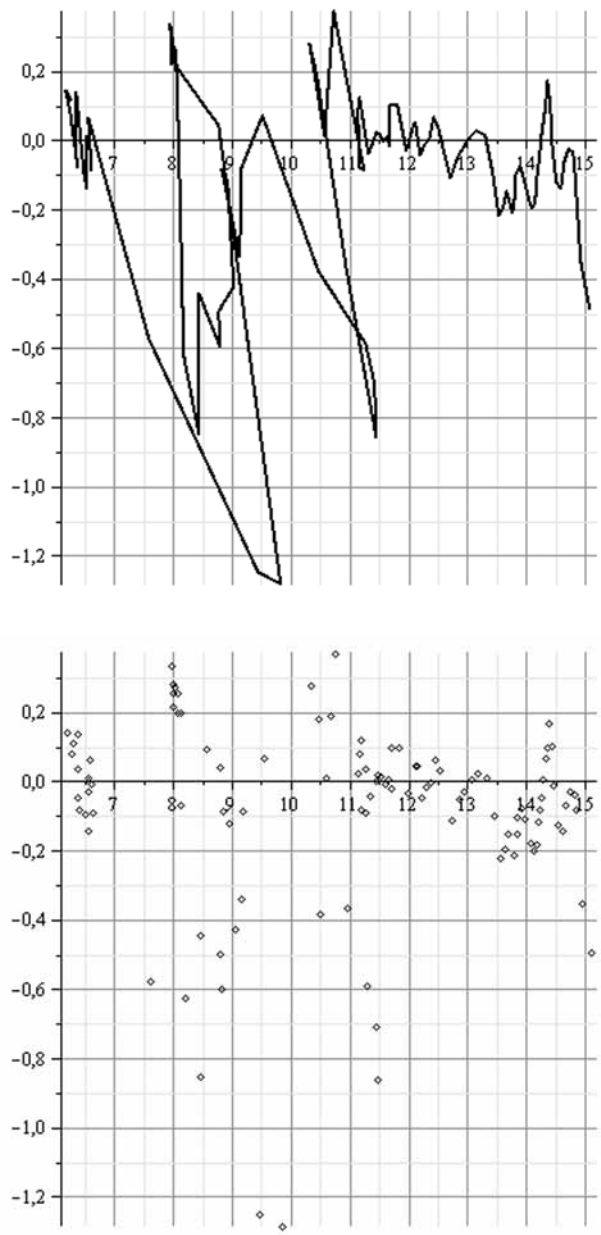


**Рис. 3.** *Динамика федерального бюджета США с 1901 по 2010 гг. представлена графиком зависимости* $\ln x_r$ *от* $\ln R$*, где* $R \equiv y_r / x_r$ *— абсолютная рентабельность совокупных затрат (по данным рис. 2). Верхний график отражает временную связь вершин (одна вершина — один годовой бюджет). Нижний — представляет только вершины (без их временной связи)*

находится в двух фазовых состояниях при разных значениях иерархического параметра $n$, причем эти состояния могут быть и непоследовательными во времени, что видно при сравнении различных точек кластера с вершинами верхнего графика рис. 3.

Каждый кластер характеризуется определенным значением иерархического параметра $n$, и

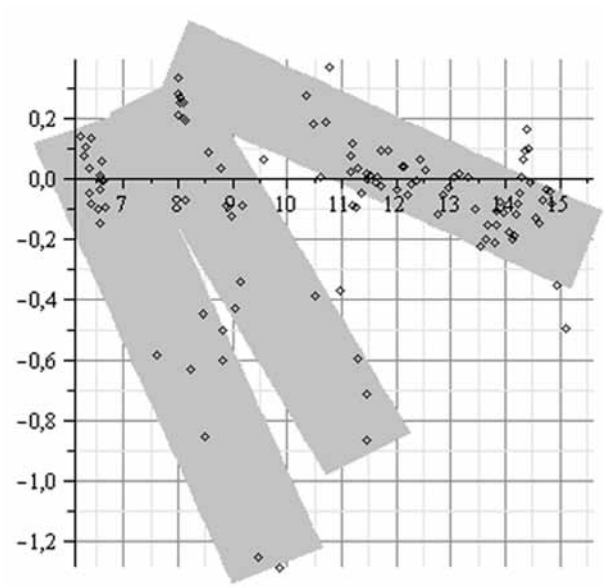


**Рис. 4.** *Кластерная структура экономического отклика — уменьшение рентабельности при росте федерального бюджетного финансирования США 1901–2010 гг., соответствует линейной структуре уравнения состояния (3.6). Значения иерархического параметра в кластерах (слева направо):* $n_1 = 0{,}667$; $n_2 = 0{,}429$; $n_3 = 0{,}09$

соответствует определенному отклику экономики — уменьшению рентабельности при росте федерального бюджетного финансирования, согласно линейному уравнению (3.6).

Дадим описание иерархии кластеров, нумеруя их слева направо (с указанием направляющей прямой кластера (3.6); $C$ — совокупного спроса МКЭС как функции абсолютной рентабельности R, согласно формуле (2.52)):

1. (1901–1919) и (1931–1935) гг., $n_1 = 0{,}667$; $v_1 = 754$;

$\ln R = 2{,}65 - 0{,}4 \ln x_r$ $(6{,}2 \leq \ln x_r \leq 9{,}825)$;

$C_1 = 754 k_0 / R^{3/2}$.

2. (1920–1930) и (1936–1947) гг., $n_2 = 0{,}429$; $v_2 = 4754$;

$\ln R = 2{,}54 - 0{,}3 \ln x_r$, $(7{,}5 \leq \ln x_r \leq 11{,}5)$;

$C_2 = 4754 k_0 / R^{2{,}33}$.

3. (1948–2010) гг., $n_3 = 0{,}09$; $v_3 = 311951$;

$\ln R = 1{,}05 - 0{,}083 \ln x_r$, $(7{,}9 \leq \ln x_r \leq 15{,}5)$;

$C_3 = 311951 k_0 / R^{11}$.

Таким образом, имеющая место кластерная структура экономического отклика — уменьшение рентабельности при росте федерального бюджетного финансирования США 1901–2010 гг., определяется линейной структурой уравнения состояния (3.6), как уравнения направляющей прямой кластера. Уравнение получено при описании экономики США как эконо-

мики равновесного состояния для термодинамической системы с нулевым химическим потенциалом, когда для любого изменения числа предприятий системы не требуется дополнительных усилий, результат которых можно было бы трактовать как соответствующую работу макроэкономической системы.

## Список источников

1. *Качевский Д. Н.* О гоморентабельности в экономике // Управление развитием крупномасшт. систем MLSD'2011: мат. 5-й междунар. конф., 3–5 окт. 2011 г., Москва. Т. I. — М.: 2011. — с. 41-44.

2. *Качевский Д. Н.* Термодинамика и статистика макроэкономических систем // Труды междунар. конф. «Математическая теория систем, МТС-09», Москва, Россия, 26-30 янв. 2009 г., 2009. с. 155-159.

3. *Кукушкин В. А.* Введение в математическую микроэкономику. ЧГПУ; Чебоксары: 2007. 345 с.

УДК 330.115

**ключевые слова:** макроэкономика, термодинамика, кластеры, рентабельность