МИКРОЭКОНОМИКА

О ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ ВОЗМОЖНОСТЯХ ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ[1]

Е. А. Герман, А. Г. Дмитриев, Т. А. Козелецкая

Рассмотрен вопрос о корректной записи математических выражений с именованными и размерными величинами. Показано, что в случаях, когда решение дифференциального уравнения модели записано математически корректно в отношении размерных величин, даже при отсутствии начальных и граничных условий (и, следовательно, невозможности определить константы интегрирования), имеется возможность интерпретировать их на основе свойств полученных математических функций. В этой ситуации константа интегрирования приобретает статус нового параметра модели, не содержащегося в исходном дифференциальном уравнении, что, в свою очередь, расширяет понятийный аппарат, относящийся к объекту моделирования.

Введение

Как известно, математическое моделирование находит все более широкое распространение и в гуманитарных областях знаний. Например, в экономической теории давно сформировалось и развивается направление математической экономики. Известно также, что некорректное использование математических операций с именованными и размерными величинами в предметных областях часто приводит к бессмысленным математическим выражениям. По всей видимости, именно это обстоятельство послужило основанием для введения Морисом Алле термина «математическое шарлатанство» [1, 10]. Примеры из экономической теории и ссылки на оригинальные работы разных авторов на этот счет можно найти, например, в п. 2.3.3. монографии Р. Л. Раяцкас и М. К. Плакунова «Количественный анализ в экономике» [6]. Корректная же запись математических выражений с именованными величинами, напротив, не только позволяет избежать появления бессмысленных с точки зрения предметной области математических выражений, но и открывает дополнительные возможности для математического моделирования в гуманитарных областях знаний. Об этом и пойдет речь в данной работе.

В целях полноты изложения первоначально напомним некоторые моменты из истории математики и обратим внимание на некоторые важные для данной работы обстоятельства.

1. О размерных и абстрактных величинах

При математическом моделировании в любой предметной области всегда имеют дело с именованными и размерными величинами. При этом используют математический аппарат, разработанный для величин другого класса — абстрактных математических величин. Математические величины не имеют имен и для своей количественной характеристики не требуют выбора единиц измерения. Понятие «размерность величины»[2] не имеет к ним отношения. Имена величин в предметной области определяются свойствами объекта рассмотрения, а размерность — еще и выбором системы единиц измерения.

Указанные отличия математических величин от величин, используемых в предметных областях, вполне очевидны.

Действительно, если обратиться к истокам математической науки, то нетрудно обнаружить следующее. Потребность в счете объектов реального мира привела к появлению натуральных

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект №11-06-00319-а, «Математические модели поведения агентов рыночных отношений».

[2] В метрологической литературе используют термин «размерность величины» [1]; в физической же предпочитают говорить о «размерности единицы измерения» [5]. Основоположник методологии анализа размерностей Ж. Фурье интересовался изменениями одних единиц измерения при изменении других. Однако при конкретном анализе удобно говорить о размерности величин.

чисел. Использование их при счете сопровождалось добавлением имени соответствующих объектов счета (5 яблок; 5 баранов; 2 кувшина). Умная голова обнаружила, что результат счета одноименных объектов после операции их физического объединения может быть получен без выполнения самой операции объединения. Для этого достаточно выполнить операцию сложения соответствующих именованных чисел. По всей видимости, этот скачок из мира реальных субстанций в мир абстрактного был одним из первых в истории человечества. Дальше — больше. Обнаруженная инвариантность операции сложения именованных чисел в отношении их имен положила начало арифметике. Обнаруженная позже инвариантность некоторых операций и в отношении самих чисел привела к понятию «величина» (абстрактная математическая величина) и появлению алгебры.

Математика приобрела статус самостоятельной научной дисциплины. Позже появился функциональный анализ и другие математические конструкты[1]. В арсенале математики появились многочисленные операции над ее объектами, над абстрактными числами и абстрактными математическими величинами.

Корректность выполнения некоторых из этих операций над именованными и размерными величинами, на наш взгляд, заслуживает обсуждения.

Вероятно, впервые на этот вопрос обратили внимание идеологи математического подхода в теории измерений Суппес и Зинес [8]. На первых же страницах своей монографии они недоумевают: «…В большинстве случаев читатель сталкивается с набором противоречивых и сбивающих с толку догм, объявляющих допустимыми … выполнение тех или иных правил. Обучая человека началам науки, мы предупреждаем его, что „не имеет смысла" складывать числа, относящиеся к разным свойствам, скажем, к весу и росту, но в то же время предлагаем изучающим физику умножать числа, связанные с такими понятиями, как скорость и время, или делить меру расстояния на меру времени. Почему же умножение „более осмыслено", чем сложение?».

Поставив важный для математического моделирования вопрос, они, к сожалению, не дали на него ответа. После некоторых рассуждений попытаемся ответить на него.

2. О математических операциях с размерными величинами

По всей видимости, математические операции можно разделить на две группы.

Одни из них имеют аналогами действия над объектами реального мира. Например, сложение имеет своим аналогом объединение однородных, одноименных объектов и их долей в целое; деление имеет своим аналогом разделение целого на однородные и одноименные доли. Эти операции можно отнести к содержательным операциям. Когда мы делим 3 арбуза на 5 едоков ($\frac{3\text{ арбуза}}{5\text{ едоков}} = ?$), то, очевидно, получаем количество арбуза на одного едока. Или когда делим пройденный телом путь (S) на затраченное для этого время (Δt), то получает среднюю скорость (v), т. е. путь, пройденный за единицу времени. Другими словами, можно сказать, что при делении разноименных количеств получаем «количество числителя», приходящееся на «единицу знаменателя». В этом содержательный смысл математической операции деления.

Другие же операции не имеют аналогов в мире вещей. Например, логарифмирование, возведение в степень и др. Их можно отнести к формальным операциям.

Еще в начальной школе в самом начале изучения математики обращается внимание учащихся не недопустимость сложения разноименных чисел и величин. Вводят понятие отвлеченного (математического) числа, а позже и математической величины. В дальнейшем при изучении математики имеют дело с абстрактными величинами и числами, формируя и развивая способность учащихся к абстрактному мышлению[2].

О существовании именованных величин и чисел вспоминают лишь при изучении физики и обращают внимание учащихся на корректность математических операций с ними. Вводят запрет на одни операции, вводят ограничения на другие и допускают неограниченное использование третьих. Например, запрещена операция возведения в степень, если показатель степени — именованная (точнее сказать, размерная) величина; запрещено действие оператора логарифмирования на именованную (размерную) величину. Операция

[1] По характеристике А. Н. Колмогорова объектами математических исследований XX столетия стали «возможные математические конструкты». В этом контексте математику можно рассматривать как науку о возможном.

[2] На новомодном языке Минобрнауки — формируется соответствующая компетенция.

сложения (вычитания) допустима только лишь в отношении одноименных количеств и не допустима в отношении разноименных, в то время как операция деления (умножения) подобных ограничений не имеет. Можно сказать, обнаруживается инвариантность одних математических операций в отношении абстрактных и именованных количеств, и неинвариантность других. В этой ситуации можно говорить о математическом «неравноправии» абстрактных величин и именованных величин. Можно также говорить и о разных классах величин и чисел, рассматриваемых в математике, с одной стороны, и в предметных областях, с другой.

В этой связи представляется весьма целесообразным предложение Н. Р. Кемпбелла об использовании в теории измерений[1] вместо единого математического понятия «число» трех различных понятий [10]: 1) числовой знак или нумерал (*numeral*); 2) физическое число (*physical number*)[2]; 3) число (*number*) в полном математическом объеме этого понятия. При этом целесообразно иметь в виду не только вещественные числа, но и комплексные числа, кватерионные числа, октионные числа и др.

Для нумералов Кемпбелл определял лишь отношения эквивалентности и порядка. Благодаря этому нумералы могут быть именами индивидуальных объектов (№ игрока на его футболке, № квартиры и т. п.). Порядок является общим свойством нумералов и математических вещественных чисел и позволяет нумералам изображать математические числа.

К физическим числам Кемпбелл относил числа, применяемые при счете, т. е. именованные числа. При счете мы говорим «5 чашек», «21 рубль» и т. д. Отметим, что называя результат измерения, например, длины стержня, указывая, например 5,32 м, по существу, мы тоже говорим о результате счета, но с использованием не натуральных, а вещественных чисел. Именованное и размерное число 5,32 м показывает число эталонов длины, укладывающихся в длине интересующего объекта. Указывая при этом единицу измерения длины (м) косвенно дают информацию об имени интересующего свойства.

В предметных областях при написании математических выражений с именованными величинами следует не забывать, что не все математические операции с ними допустимы. Например, под оператором логарифмирования не могут быть именованные количества (числа, величины), как не могут быть именованными (точнее сказать, размерными) показатели степени, аргументы тригонометрических функций и др. Не имеет смысла сравнивать (=; >; <) разноименные количества в той или иной предметной области. Математика дала дефиниции этим операциям только над абстрактными числами и величинами.

Возвращаясь к недоумению Суппеса и Зинеса [8], упомянутому выше, на их вопрос о «большей осмысленности» операций деления и умножения можно дать следующей ответ. Через операции деления и умножения разноименных величин предметной области, во-первых, даны дефиниции других величин, поэтому они и более осмысленны. С помощью этих операций установлены количественные связи между величинами, отображающими свойства объектов реального мира, другими словами, установлены физические законы природы. Примерами могут послужить определение скорости движения t как производной от радиус-вектора ($\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$) (а иными словами, как отношение (операция деления) бесконечно малого приращения радиус-вектора и бесконечно малого приращения времени) или второй закон Ньютона ($\vec{w} = \frac{\vec{F}}{m}$), или определение массового расхода топлива ($\chi = \frac{m}{t}$), плотности однородного вещества ($\rho = \frac{m}{V}$) и т. п.

3. О формальной верификации математических моделей

Введение Ж. Фурье понятия «размерность» (в монографии «Аналитическая теория тепла», 1822 г.) оказалось весьма плодотворным. Разработанная позже методология анализа размерностей в уравнениях математических моделей физики дает возможность, прежде всего, выявлять бессмысленные с точки зрения предметной области математические выражения, т. е. проводить формальную[3] верификацию уравнений модели. Анализ размерностей дает возможность

[1] Обзор основополагающих работ репрезентативной теории измерений дан в статье [6].

[2] Кемпбелл занимался проблемами измерений в физике. В других предметных областях можно говорить и о других числах и величинах: об экономических числах и величинах, о психологических числах и величинах и т. д.

[3] Содержательную верификацию проводят, как известно, сопоставлением с эмпирическими данными.

также определять вид функциональных связей между величинами [7]. На его основе, как известно, разработан метод подобия.

В практике математического моделирования в технических науках и в физике формальная верификация (анализ размерностей) давно превратилась в рутинную процедуру, о которой и говорят-то лишь на учебных занятиях. Это стало возможным благодаря достигнутым договоренностям относительно единиц измерений и систем единиц измерений физических и технических величин. Ведь само понятие «размерность величины» имеет смысл в той или иной системе единиц измерений и неразрывно связано с ее основными единицами.

Однако, например, в экономико-математическом моделировании методология анализа размерностей не получила должного распространения, несмотря на осознание важности ее для экономической теории [6]. Даже в 2011 г монографию де Йонга [13], рекомендованную к переводу на русский язык еще в 1970 г. [2], не найти в библиотеках России даже на английском языке.

4. Парадокс размерности

В практике математического моделирования, оперируя с именованными и размерными величинами предметной области, нередко записывают математические выражения, содержащие операторы, которые не определены математической наукой в отношении размерных величин. Например, оператор логарифмирования.

Его записывают, например, в решении дифференциального уравнения:

$$dy = A \cdot y \cdot dx. \qquad (1)$$

Это уравнение используют, например, рассматривая радиоактивный распад ядер, поглощение света в толще вещества, разряд конденсатора и др. В этих случаях абстрактные величины в формуле (1) становятся именованными и размерными. Причем каждая из них может быть представлена разными именованными числами в зависимости от выбранных единиц измерения, и может иметь разные размерности в зависимости от выбора системы единиц измерения.

В случае радиоактивного распада: y — это число ядер в системе (обычно обозначают N), x — это время (обычно t). Тогда в соответствии с уравнением (1) коэффициент A имеет размерность ($\dim A$)[1], обратную размерности времени, т. е. $\dim A = T^{-1}$.

В случае поглощения света: y — это интенсивность света (обычно «I»), x — это координата, выраженная в единицах длины (м, см или др.). Коэффициент A в этом случае имеет размерность, обратную размерности длины (L), т. е. $\dim A = L^{-1}$.

В случае же разряда конденсатора: y — это напряжение на конденсаторе (обычно U), x — это время (обычно t). Коэффициент A в этом случае определяется параметрами электрической цепи и имеет размерность, обратную размерности времени, т. е. $\dim A = T^{-1}$.

Математическое выражение для решения уравнения (1), как известно, имеет вид:

$$\ln y = A \cdot x + C, \qquad (2)$$

где C — произвольная константа.

Для определения константы интегрирования, т. е. для выбора адекватного в предметной области решения из множества математически возможных, необходимы дополнительные сведения об объекте моделирования в виде так называемых начальных (или граничных) условий. Их, как известно, подставляют в решение (2).

В предметной области при такой подстановке возникает естественный вопрос. В каких единицах следует использовать численные значения величин?

Действительно, найти, например, ln(28) или ln(2800) нетрудно. При этом очевидно получим, что ln(28) < ln(2800). Но как найти ln(28 м) или ln(2800 см)? Неужели ln(28 м) или ln(2800 см)? Ведь 28 м = 2800 см.

Ответов на подобные вопросы не существует. Логарифмирование размерных величин, как и другие математические операции с ними не являются предметом математических исследований, и записывать ln(28 м) или ln(2800 см) математически некорректно.

Несмотря на это, как известно, распространена такая практика. «Забывают» о существовании единиц измерения величин, «забывают» о размерностях этих единиц и без каких-либо на то оснований «отбрасывают» наименования величин, проводят преобразования и вычисления. Полученному результату также без каких-либо обоснований вновь приписывают отброшенные атрибуты. Удивительно, но полученный таким

[1] Здесь и ниже использованы принятые в физике и системе СИ обозначения размерности.

образом результат адекватно отображает моделируемую реальность. Совершаются две математически необоснованные операции, если не сказать, две ошибки, а результат получается правильным. Эту ситуацию можно называть «парадокс размерности».

Подобная ситуация возникает и в отношении константы интегрирования другого дифференциального уравнения:

$$dy = A \cdot \frac{dx}{x}, \qquad (3)$$

решение которого, как известно, имеет вид:

$$y = A \ln(x) + C. \qquad (4)$$

Если же не «забывать», что объектами математических исследований являются абстрактные величины и числа, то записывать логарифм именованной величины математически некорректно. Значит, и в предметной области записывать решение дифференциального уравнения в форме (2) или (4) математически некорректно.

К некорректным математическим операциям с размерными величинами относятся также и другие. Это сложение (вычитание) величин разной размерности, возведение в степень, если показатель степени — величина размерная, тригонометрические функции размерного аргумента[1].

А вот операции умножения и деления величин разной размерности к таковым не относятся, о чем уже говорилось выше.

5. Размерность констант интегрирования

Следует отметить, что в предметной области постоянная интегрирования С тоже имеет размерность, что вполне естественно. Причем тождественные математические преобразования приводят к изменению ее размерности.

В этом нетрудно убедиться на следующем примере.

Ориентируясь на правую часть выражения (2) можно сказать, что C — величина безразмерная, т. е.:

$$\dim C = 1. \qquad (5)$$

Это следует из того, что в выражении (2) $\dim C = \dim(A \cdot x)$, а любая величина и ее приращение имеют одинаковую размерность, т. е. $\dim(x) = \dim(dx)$. В соответствии с исходным дифференциальным уравнением (1) $\dim(dx) = \dim^{-1} A$. Следовательно, $\dim(A \cdot x) = 1$, а значит и $\dim C = 1$.

Если же провести тождественные математические преобразования и в силу произвольности постоянной интегрирования в выражении (2) вместо безразмерной величины взять другую безразмерную величину D, такую, что:

$$\ln D = C, \qquad (6)$$

то вместо уравнения (2), получим:

$$\ln \frac{y}{D} = A \cdot x. \qquad (7)$$

В этом выражении, как всегда, под оператором логарифмирования должна стоять безразмерная величина, поэтому $\dim D = \dim y$. При этом в предметной области y величина не безразмерная ($\dim y \neq 1$). Следовательно, и $\dim D \neq 1$, что не совпадает с выражением (5). Это означает, что при тождественных математических преобразованиях изменилась размерность константы интегрирования.

Возникает новый вопрос. Можно ли подобные преобразования с размерными величинами считать тождественными? Но ведь их часто проводят и получают адекватные результаты. Это снова парадокс размерности.

6. Как избежать математических некорректностей

Избежать некорректных записей математических выражений с именованными величинами, например, таких как в выражениях (2) и (4), нетрудно, если воспользоваться математически допустимой произвольностью константы интегрирования. Так, если в выражении (2) константу представить как ($\ln D$), то приходим к другому виду решения уравнения (1):

$$y = D \cdot \exp(A \cdot x), \qquad (8)$$

в котором некорректные операции с размерными величинами уже отсутствуют. Показатель степени ($A \cdot x$) — величина безразмерная, а произведение размерной величины D на безразмерную экспоненту математически корректно.

Аналогично, если в выражении (4) константу C представить как ($-A \ln D$), то можно записать выражение:

[1] Как известно, количественно плоский угол определяется отношением длины дуги окружности с центром в вершине угла к ее радиусу. Поэтому в любой системе единиц измерения угол — безразмерная величина вне зависимости от выбранной единицы измерения для количественной характеристики угла. Единицами же измерения угла могут быть и полный угол, и развернутый угол, и прямой угол, и 1/360 часть полного угла (угловой градус), и 1/100 часть полного угла (артиллерийский градус), и 1/2π часть полного угла (радиан) и др.

$$y = A \cdot \ln \frac{x}{D}. \qquad (9)$$

в котором также некорректные операции с размерными величинами отсутствуют, если $\dim x = \dim D$. В этом случае под оператором логарифмирования стоит безразмерное отношение (x/D).

Таким образом, соответствующим выбором константы интегрирования можно избежать некорректных выражений в решениях дифференциальных уравнений.

7. О целесообразности корректной записи выражений с размерными величинами

С прагматической точки зрения о парадоксе размерностей и размерностях констант интегрирования можно было бы и не говорить, поскольку результаты моделирования получаются адекватными реальности.

Однако обратим внимание на важное обстоятельство, касающееся интерпретации констант интегрирования дифференциальных уравнений с размерными величинами.

Нетрудно увидеть, что вид математического выражения, представляющего собою это решение, если оно математически корректно в отношении размерных величин, облегчает интерпретацию появившихся в процессе интегрирования констант.

Подтвердим это несколькими примерами.

1. Рассмотрим простейшую модель колебательного движения тела массой под действием возвращающей силы $\vec{F} = -k\vec{x}$. Соответствующее дифференциальное уравнение, как известно, имеет вид:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{k}{m} y = 0. \qquad (10)$$

Результат его интегрирования можно представить в двух вариантах:

$$y = C_1 \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t + C_2 \sin \sqrt{\frac{k}{m}} t \qquad (11)$$

и

$$y = D_1 \sin \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t + D_2 \right), \qquad (12)$$

в каждом из которых по две произвольные константы интегрирования. Константы C_1 и C_2 в выражении (11), и константы D_1 и D_2 в выражении (12). Оба эти выражения математически корректны в отношении размерных величин, если $\dim C_1 = \dim y$, $\dim C_2 = \dim y$, $\dim D_1 = \dim y$, а $\dim D_2 = 1$. С помощью математически тождественных преобразований от одного вида нетрудно прийти к другому.

Однако интерпретация констант интегрирования в выражениях (11) и (12) разная. Так, если в выражении (11), C_1 и C_2 — это амплитуды гармонических составляющих сложного колебания, то в формуле (12) константа D_1 — это амплитуда простого гармонического колебания, а D_2 — его начальная фаза. На этом примере видно, что выбор формы записи решения дифференциального уравнения позволяет даже расширить понятийный аппарат в отношении объекта моделирования. В данном примере появилась возможность говорить о фазе и начальной фазе колебаний, чего не было в исходном дифференциальном уравнении (10).

Следует заметить, что для интерпретации констант интегрирования ни в одном, ни в другом случае нам не потребовались ни граничные, ни начальные условия. Достаточно было лишь математических свойств полученных выражений.

2. Рассмотрим решение уравнения (1). Если в качестве его решения использовать выражение (8), то исходя из свойств экспоненциальной функции ($\exp(0) = 1$) не трудно видеть, что $D = y|_{x=0}$, т. е. значение функции при нулевом значении аргумента. Сдвиг начала отсчета аргумента[1] на величину a (т. е. замена) приведет лишь к изменению предэкспоненциального множителя D в $\exp(a)$ раз. При этом смысл D сохраняется.

Если же в качестве решения использовать математически некорректное в отношении размерных величин выражение (2), то по поводу смысла константы интегрирования $x = \hat{x} + a$ сказать нечего.

На этом примере видно, что корректная в отношении размерностей запись математических выражений дает возможность интерпретировать константу интегрирования, основываясь только на свойствах функции, не касаясь граничных или начальных условий рассматриваемой задачи и не имея эмпирической информации об объекте моделирования.

3. С решением уравнения (3), ситуация аналогичная.

Если решение использовать в виде выражения (9), то нетрудно интерпретировать константу интегрирования на основе свойств логарифмичес-

[1] Например, при использовании шкалы интервалов для измерения x.

кой функции — при переходе аргумента через значение, равное единице, изменяется знак функции. Причем изменение масштаба аргумента[1] (замена $x = b \cdot \tilde{x}$) приводит только к увеличению численного значения функции, выраженного в единицах *A*. Это увеличение на ln*b* не изменяет смысл константы *C* — значение аргумента, при котором происходит изменение знака функции. В свою очередь, измерение знака можно связывать с качественными изменениями переменных в интересующей системе.

Здесь, как и в предыдущих случаях, при интерпретации использованы только математические свойства функций.

При использовании в качестве решения уравнения (3), математически некорректного в отношении размерных величин выражения (4), по поводу смысла константы интегрирования сказать нечего.

Приведенные примеры дают основание высказать следующее утверждение, относящееся к математическим моделям с дифференциальными уравнениями.

Если решения дифференциальных уравнений модели записаны математически корректно в отношении размерных величин, то даже при отсутствии возможности определить константы интегрирования (отсутствуют начальные или граничные условия) имеется возможность интерпретировать их на основе математических свойств полученных функций. Математические свойства подсказывают интерпретацию появившихся в процессе решения уравнений констант, которые в этой ситуации приобретают статус нового параметра модели, не содержащегося в исходной дифференциальной модели (!). Это, в свою очередь, расширяет понятийный аппарат, относящийся к объекту моделирования.

Вместо заключения

На достоинства и целесообразность корректной записи математических выражений с именованными и размерными величинами мы обратили внимание при поиске уравнения связи между интенсивностью ощущений индивида, вызванных потреблением благ, и количествами этих благ. Это уравнение в экономической теории спроса называть, как известно, уравнением кардиналистской (количественной) полезности.

Подробнее о проблеме получения количественного уравнения полезности сказано в нашей работе [3], где дано психофизическое обоснование дифференциального уравнения полезности (аналогичное выражению (3). Граничных условий для определения константы интегрирования взять было негде, т. к. психофизика — психологическая наука, и она пока еще не предложила метода количественной оценки ощущений удовлетворения по шкале отношений. Она была представлена с использованием допустимости математической произвольности константы интегрирования в нетрадиционной для чистой математики форме, в соответствии с требованием корректной записи математического выражения с именованными величинами (решение записали в виде, аналогичном выражению (9)).

В результате впервые в теории потребительского спроса было получено так называемое кардиналистское уравнение полезности. Оно содержит два параметра, одним из которых как раз и является константа интегрирования, приобретшая ясный психофизический смысл. Она представляет собой уровень потребления, при достижении которого ощущения удовлетворения и раздражения от потребления блага сменяют друг друга при переходе через некий уровень количества потребленного блага, названный в работах [3] и [5] уровнем нейтрального потребления.

Список источников

1. *Алле М.* Современная экономическая наука и факты // THESIS. — 1994. — Вып. 4.

2. *Гладышевский А. И.* Размерностный анализ для экономистов. Ф. Й. Де Йонг. // Экономика и математические методы. — 1970. — Т. VI. — №3. — С. 477-480.

3. *Дмитриев А. Г., Козелецкая Т. А., Герман Е. А.* Теория потребительского спроса. Психофизическое обоснование дифференциального уравнения кардиналистской полезности; интерпретация решения. // Журнал экономической теории. — 2011. — №1. — С. 45-53.

4. *Кнорринг В .Г.* Развитие репрезентативной теории измерений. // Измерения, контроль, автоматизация. — 1980. — №11-12 (33-34). — С. 3-9.

5. *Козелецкая Т. А.* Модели экономического поведения индивида : дисс. … канд. экон. наук.– СПб., 2005.– 159 с.

6. *Раяцкас Р. Л., Плакунов М. К.* Количественный анализ в экономике. — М.: Наука, 1987. — 392 с.

7. *Сена Л. А.* Единицы физических величин и их размерности. М.: Наука, 1988. — 431 с.

8. *Суппес П., Зинес Дж.* Основы теории измерений // Психологические измерения. — М.: Мир, 1967. — 196 с.

[1] Например, при использовании шкалы отношений для измерения *x*.

9. *Чертов А. Г.* Физические величины. Терминология, определения, обозначения, размерности, единицы. Справ. пособие. — М.: Высшая школа, 1990. — 335 с.

10. *Allais M.* La science economigue d'aujourd'hui et lesfaits. // Revue des Deux Mondes. — 1990. — Juin. — P. 54-74.

11. *Campball N. R.* An account of the principles of measurement and calculation. — London : Longmans, Green & Co, 1928. — 290 p.

12. *Campball N. R.* Physics. The elements. — Cambridge: University press, 1920. — 565 p.

13. *F. J. De Jong.* Dimensional Analysis for Economists. — Amsterdam : North-Holland Publishing Company, 1967. — 220 p.

УДК. 51-77

ключевые слова: именованные величины, математические модели, размерность величин, дифференциальные уравнения, начальные условия