ЖУРНАЛ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ №3/2011

ЭКОНОМИЧЕСКОЕ РАВНОВЕСИЕ И АГРЕГИРОВАНИЕ ПОКУПАТЕЛЕЙ: РЕАБИЛИТАЦИЯ ТЕОРЕМЫ ВАЛЬДА[1]

В. К. Горбунов

Излагается методологическая проблема теории экономического равновесия, порождаемая известными парадоксами агрегирования покупателей Гормана и Зонненшейна — Мантеля — Дебре и заключающаяся в отсутствии единственности и устойчивости равновесия в модели равновесия Эрроу — Дебре. Парадоксы устраняются на основе авторской концепции о рыночном (коллективном) потребительском спросе как об априорном объекте теоретического описания рынка и математического моделирования. Представление рыночного спроса с помощью коллективной функции полезности делает естественным условие Вальда — Самуэльсона (слабая аксиома выявленного предпочтения) в модели Касселя — Вальда, обеспечивающее единственность равновесия (теорема Вальда) и вводит эту модель в класс вычислимых моделей равновесия[2].

1. Введение

Теория экономического равновесия (ТЭР) основана выдающимся французским экономистом Леоном Вальрасом [4]. Ее современное состояние [1, 46] является венцом неоклассического анализа, основанного на постулате рациональности поведения основных субъектов экономической деятельности — производителей (фирм) и потребителей товаров и услуг (благ). Она объединяет теорию потребительского спроса с теорией производства и является теорией рыночного ценообразования. Основной вопрос ТЭР — выявление содержательных условий существования «равновесных» цен, при которых рыночный (коллективный) потребительский спрос может быть удовлетворен совокупным предложением экономики. Важными также являются вопросы единственности равновесия и его устойчивости относительно процесса «нащупывания» равновесия, т. е. перехода в равновесие из неравновесия.

Реальные экономики далеки от условий совершенной конкуренции, но модели равновесия, допускающие их идентификацию (калибровку) конкретным экономикам, могут служить практическим инструментом количественного экономического анализа и государственного регулирования экономики посредством налогов и пошлин. Соответствующее направление в экономико-математическом моделировании называется прикладным (или вычислимым) экономическим равновесием (*Applied General Equilibrium*) [21, 22, 34, 51]. Прикладные модели общего равновесия разной степени агрегирования стали в развитых странах инструментом количественного анализа для государственных институтов и крупных транснациональных корпораций. В цитированных работах В. Л. Макарова и его соавторов приведен опыт использования высокоагрегированных вычислимых моделей равновесия для анализа современной экономики России. Отметим, что несмотря на «рыночность» ТЭР могла использоваться[3] и для определения «правильных» цен в плановой экономике [26].

Однако современное состояние ТЭР, как и некоторых других разделов экономической теории, является кризисным. Этому кризису, в частности, посвящен доклад В. М. Полтеровича [25], в котором констатируется: «Несмотря на многочисленные попытки, не удалось найти сколько-нибудь общие и естественные условия, обеспечивающие единственность и устойчивость равновесия». Что, наряду с «невозмож-

[1] Статья развивает часть доклада автора на IV Всероссийском симпозиуме по экономической теории (Екатеринбург, 29 июня — 2 июля 2010 г.).

[2] Исследование выполнено при финансовой поддержке целевой программой Минобразования РФ «Развитие научного потенциала высшей школы (2009–2010 гг.), проект 2.1.3/6763 «Развитие математических моделей и анализ рыночного спроса и производства».

[3] Но, к сожалению, не использовалась.

ностью сравнительной статистики», говорит о логических дефектах оснований ТЭР и, как следствие, ошибочности или бессмысленности некоторых ее выводов, а определенные успехи в ее приложениях, отмеченные выше, являются эвристическими и требуют дополнительного обоснования. Проявлением этих дефектов является недооценка первого теоретического результата относительно существования и единственности равновесия в модели экономики Вальраса — Касселя, полученного в 1935–1936 гг. австрийским математиком-статистиком Абрахамом Вальдом (1902–1950 гг.) [55]. Условие Вальда, отнесенное к рыночному спросу и обеспечившее доказательство как существования, так и единственности равновесия, эквивалентно известной слабой аксиоме Самуэльсона, предложенной в 1938 г., которая, как считается до настоящего времени, неприменима к рыночному спросу.

В данной работе мы показываем, что дефекты современного состояния ТЭР — отсутствие естественных условий, обеспечивающих единственность и устойчивость равновесия — являются следствиями ошибочного построения Вальрасом теории рыночного спроса как суммы индивидуальных спросов потребителей, максимизирующих субъективные предпочтения и действующих независимо [4, 46]. Такая схема порождает известные парадоксы агрегирования потребителей (точнее — покупателей) У. Гормана (1953) [39] и Зонненшейна — Мантеля — Дебре (1972–1974) [9, 46, 52]. Эти парадоксы до настоящего времени остаются недостаточно осознанными, и теории потребительского спроса и экономического равновесия продолжают развиваться в рамках мэйнстрима на основе концепции Вальраса, принятой и в современных обобщениях этих теорий на основе слабой аксиомы [44, 47, 48].

Преодоление парадоксов теорий спроса и равновесия достигается на основе концепции ансамбля потребителей исследуемого рынка или всей экономики как исходного объекта моделирования. Эта концепция предложена нами в книге [7] и развита в [6, 9]. Здесь она демонстрируется на примере моделей типа Вальраса — Касселя, для которых обосновывается правомерность Условия Вальда и, соответственно, существование и единственность равновесия. Предложенная модификация модели Вальраса — Касселя на основе введения коллективной функции полезности делает ее прикладной, идентифицируемой по стандартной статистической информации.

2. Основные этапы и проблемы теорий спроса и равновесия

2.1. Напомним основные этапы становления теории потребительского спроса (ПС), следуя в основном книгам неоклассиков Л. Вальраса [4], А. Маршалла [23] и Дж. Хикса [29]. Классические законы спроса, представлявшие зависимости количеств продаж благ от их цен и бюджета потребителей, были выявлены в середине XIX века О. Курно, Е. Энгелем и Г. Госсеном. Они сделали это на основе статистического анализа книг торговцев и потребительских расходов групп, различавшихся уровнем доходов (см. кн. III, гл. IV, §8 в [23]). Однако в дальнейшем эти законы коллективного поведения были перенесены из дидактических соображений на индивидуальных потребителей (домохозяйств), причем обычно это поведение предполагалось независимым.

Наиболее значительный вклад в становление теории ПС, сделал Герман Генрих Госсен. В книге 1854 г. он сформулировал два принципа рационального выбора, исходя из гедонистического принципа максимизации наслаждения, заменив наслаждение более общим понятием полезности и введя понятие предельной полезности. Эти принципы (законы Госсена) — убывание предельной полезности блага с ростом количества его потребления и равенство отношений предельных полезностей различных благ при распределении ограниченного ресурса соответствующим долям ресурса (у Госсена — время потребления благ).

Вклад Госсена в теорию потребления не был понят современниками, и лишь через двадцатилетие его принципы были переоткрыты сначала С. Джевонсом и К. Менгером, затем Л. Вальрасом. Они признали приоритет Госсена и ввели более удобный для анализа принцип максимизации полезности, представляемой некоторой вещественной функцией, при бюджетном ограничении. Этот принцип стал основой классической теории ПС [6, 24, 30, 46]. Современная теория спроса построена на основе понятия предпочтения, представляемого бинарным отношением и (для классических предпочтений) его индикатором — порядковой функцией полезности (функцией предпочтения).

Венцом классической теории спроса является анализ Е. Слуцкого (сравнительная ста-

тика, 1915), выявивший новые законы спроса относительно свойств дополнения-замещения. Этот анализ был развит в содержательном отношении Хиксом [29] и усовершенствован П. Самуэльсоном в фундаментальном труде «Foundations of Economic Analysis» (1947 г.) [28].

Успехи теории ПС стимулировали прикладные исследования по анализу и прогнозированию спроса. Однако с точки зрения практики интерес представляет не индивидуальный спрос, которому формально до настоящего времени посвящена теория потребительского выбора, а спрос рыночный. Классикам казалось, что переход от индивидуального спроса к рыночному будет простым. Процитируем Хикса: «Изучение индивидуального спроса — лишь средство для изучения рыночного спроса. К счастью, при помощи наших методов мы можем осуществить подобный переход очень легко. Рыночный спрос обладает почти в точности теми же свойствами, что и индивидуальный» [29, с. 128].

Распространение теоретических свойств индивидуального спроса на рыночный потребовало определения коллективной функции полезности, рационализирующей наблюдаемый рыночный спрос в соответствии с моделью максимизации полезности. Однако уже простые примеры двух благ и двух покупателей показали (см., например, Example 4. C. 1 в [46]), что важное следствие классической рациональности — слабая аксиома выявленного предпочтения, справедливая для индивидуальных спросов, не выполняется для их суммы в общем случае (почти всегда). При этом, разумеется, коллективной функции полезности не существует.

Общее решение проблемы существования коллективной функции полезности было получено в 1953 году У. Германом, который показал, что для существования коллективной функции предпочтения, порождающей рыночный спрос, являющийся суммой конечного числа спросов, порождаемых индивидуальными функциями предпочтений, необходимо и достаточно, чтобы все кривые Энгеля (индивидуальные и коллективная) были параллельными прямыми [39].

Результат Гормана не позволяет построить теорию рыночного спроса в традиционной схеме Вальраса, необходимую для развития количественных методов анализа спроса и построения или обоснования эффективных моделей экономического равновесия. Имеется немало исследований условий на индивидуальные предпочтения и распределение доходов, обеспечивающих корректное агрегирование покупателей (существование коллективной функции предпочтения), например, [12, 37, 42], однако «выяснить их специфику до сих пор не удается, а без этого ответы на многие фундаментальные вопросы теории не могут быть получены» [25].

2.2. Проблемы теории ПС, являющейся базисом ТЭР, неизбежно проявляются в надстройке. Основы ТЭР концептуально восходят к А. Смиту, описавшему идеализированный свободный рынок как систему конкурирующих производителей и потребителей благ, преследующих свои личные цели. Однако формальная математическая теория равновесия, позволяющая анализировать и обосновывать эвристику Смита, была заложена Вальрасом лишь через столетие [4]. Эта работа математического характера существенно опередила свое время и была не понята экономистами — современниками Вальраса, кроме одного его ученика — В. Парето.

Вальрас описал экономику Смита, производящую некоторую номенклатуру продуктов и состоящую из конечных множеств производителей и потребителей, представленных своими функциями предложения и спроса, зависящими от рыночных цен. При этом вся прибыль производителей распределяется между потребителями и тратится на приобретение произведенных продуктов (закон Вальраса). Вальрас определил цены равновесия, при которых [4, с. 193]:

1) спрос на продукты уравнивается их предложением;

2) продажная цена продуктов равна их себестоимости.

Эти два положения представляют две важнейшие характеристики эффективной конкурентной экономики Смита: цены благ определяются производственными характеристиками (технологиями и издержками), а количества продаж — предпочтениями потребителей. Соответственно, структура равновесных конкурентных цен, определяющая эффективное использование ресурсов конкретной экономики, прежде всего труда, имеет затратный характер, отражая технологические, климатические и ресурсные особенности данной экономики[1].

Вальрас сделал важный первый шаг становления ТЭР, представив экономику системой

[1] Эмпирическому анализу влияния климатических показателей на экономику посвящена статья [27] и цитируемые в ней работы.

уравнений равновесия спроса и предложения производимых продуктов относительно их количеств и цен. Он ограничился подсчетом числа уравнений и неизвестных системы. Оказалось, что число равенств на одно меньше, чем число определяемых цен, но один произвол несущественен, так как важны относительные цены, а не их масштаб. Вальрас предположил, опираясь на рыночный и аукционный опыт, что полученная система имеет решение, причем единственное. Отдавая отчет в том, что реальные рынки не являются строго равновесными, он ввел понятие нащупывания равновесия и предположил его устойчивость. Вальрас адресовал будущим исследователям проблему математического обоснования своей формальной теории.

Для нас существенно, что Вальрас, описывая поведение индивидуальных потребителей, представил их гладкими (непрерывными и дифференцируемыми), взаимно независящими функциями спроса. При этом он писал о дискретности индивидуального спроса, но переходил к гладким кривым, ссылаясь на эффект сглаживания при суммировании. Современные исследователи ТЭР Д. Браун и Ф. Кублер [34] выделяют этап построения Вальрасом рыночного спроса как его первую гипотезу: «Рыночный спрос является суммой спросов потребителей, максимизирующих свою полезность при бюджетных ограничениях, определяемых рыночными ценами».

Эта дидактически удобная схема построения рыночного спроса оказалась, как описано выше, противоречивой в логико-эмпирическом отношении. Вторая гипотеза Вальраса (по Брауну и Кублеру) — существование и единственность равновесных цен, и третья — локальная устойчивость нащупывания цен.

Концептуальная модель экономики Вальраса была развита шведским экономистом Густавом Касселем (1866–1945 гг.) [15]. Кассель разделил продукты Вальраса на производимые продукты потребления и факторы производства, ввел балансовые линейные уравнения использования факторов для производства продуктов, уравнения, определяющие конкурентные цены факторов через цены продуктов, и функции обратного рыночного спроса на продукты. Система балансов Касселя стала основой построения линейных моделей производства [3, 5, 20, 24]. Однако Кассель, как и Вальрас, ограничился подсчетом чисел уравнений и неизвестных.

Вариант модели Вальраса — Касселя, в которой жесткие балансы использования факторов были заменены неравенствами, в 1933–1936 гг. исследовал А. Вальд [55]. Он нашел прямое условие на рыночный спрос, обеспечившее как существование, так и единственность равновесия. Можно сказать, что Вальд обошелся без первой гипотезы Вальраса и нашел условие выполнения второй гипотезы.

Однако Вальд не отказывался от первой гипотезы Вальраса принципиально. Он находился в плену Вальрасовой схемы рыночного спроса и высказал в цитированной статье предположение, что выполнение ключевого условия для индивидуальных спросов должно обеспечивать его и для рыночного спроса. Он обещал показать это в следующей работе, что оказалось невозможным.

Условие Вальда немного позже (в 1938 г.) было переоткрыто П. Самуэльсоном [28, 49] как принцип рациональности для индивидуального потребителя, альтернативный классическому принципу максимизации полезности и названный еще позже слабой аксиомой ВП [46]. Слабая АВП называется некоторыми исследователями аксиомой Вальда [32]. Однако Вальд ввел это условие не в качестве аксиомы рациональности, а как частное предположение о возможных свойствах рыночного спроса, обеспечивающее получение желаемых свойств существования и единственности равновесных цен.

Результат Вальда считается до настоящего времени слабым, так как современная теория спроса построена по схеме Вальраса суммирования независимых индивидуальных спросов. Принцип рациональности в форме максимизации полезности эквивалентен сильной АВП [40, 46], и слабая АВП является его обобщением. Как уже отмечено, выполнение слабой АВП для индивидуальных спросов не обеспечивает ее выполнение для рыночного спроса. Попытки нахождения условий на индивидуальные предпочтения, обеспечивающих выполнение условия Вальда для рыночного спроса, как отмечено выше, приводят к неестественным предположениям относительно предпочтений и доходов потребителей. Соответственно, условие Вальда для рыночного спроса считается не соответствующим реальным рынкам. Статья Вальда до настоящего времени привлекает внимание исследователей [32, 43, 47] в методологическом отношении.

Дальнейшие исследования модели Касселя — Вальда в работах 1950-х годов [19, 38] были

основаны на созданной теории линейного программирования (ЛП) и теореме Какутани о неподвижной точке многозначного отображения (1941 г., §4.3 в [24]) вместо «неестественного» условия Вальда. При этом удалось доказать лишь существование равновесия.

2.3. Основополагающей работой в современной ТЭР считается статья К. Эрроу и Д. Дебре 1954 года [33], где для абстрактной модели конкурентной экономики, объединяющей конечные множества производителей (фирм) конечной номенклатуры продуктов и независимых потребителей с классическими предпочтениями, было доказано существование равновесия. Модель Эрроу — Дебре представляет экономическую систему как игру многих лиц, и доказательство существования равновесия потребовало привлечения сложной математической техники неподвижных точек многозначных отображений (теорема Какутани). При этом все определяется свойствами избыточного рыночного спроса, т.е. разностью совокупных спроса и предложения продуктов. Для существования равновесия достаточно наложения на предпочтения и производственные характеристики необременительных (за исключением некоторых деталей) предположений. Однако единственность равновесия не имеет места без «искусственного» условия Вальда (Слабой АВП), или действительно искусственного условия валовой заменимости1 [24, 46].

Открытие Гормана было проигнорировано исследователями модели Эрроу — Дебре, и парадокс агрегирования покупателей был вторично открыт Х. Зонненшейном в 1972 г. [52] и затем обобщен (1974 г.) сначала Р. Мантелем, затем Дебре в иной форме. Было установлено (теорема Зонненшейна — Мантеля — Дебре [9, 46]), что достаточно произвольная функция типа «цены — спрос» может считаться агрегированным избыточным спросом некоторого множества покупателей (эффект получил название Anything Goes — «Получается что угодно»). Это противоречит жестким аналитическим ограничениям на функции спроса, определяемым моделью максимизации функции предпочтения.

В теории Эрроу — Дебре значительное место уделяется проблеме социальной эффективности в смысле Парето состояний конкурентного равновесия [1, 3, 46]. Но известные теоремы благосостояния в существующем виде имеют смысл лишь в противоречивой схеме построения рыночного спроса Вальраса. То же можно сказать и о понятии функции общественного благосостояния (social welfare function), определяемой как «индекс общественной полезности» через значения индивидуальных полезностей (см. def. 4.3.2 в [46], п. 12.3 в [30]).

В микроэкономической теории [46] используется понятие репрезентативного потребителя для представления усредненных предпочтений статистического ансамбля потребителей. Это понятие анализируется в статье [45], автор которой приходит к заключению, что подходящее микрооснование макроэкономики (*microfoundation for macroeconomics*) не может быть построено на основе изучения изолированных индивидуумов и предлагает строить теорию агрегированного спроса на основе учета взаимодействий между различными индивидами. Однако индивидуальные характеристики потребителей и их численность для реальных рынков не являются наблюдаемыми, и такое направление построения агрегированного спроса вряд ли может иметь эффективное решение. Подтверждением этого являются недавние работы П.-А. Чиаппори и И. Экланда [35, 36], где исследуется модель группового поведения (*group behavior*), порождаемого заданным числом потребителей с обобщенными классическими предпочтениями, в общем случае взаимозависимыми. При этом устанавливается, что внутренняя структура спроса не является идентифицируемой по наблюдениям группового (рыночного) спроса. Следовательно, предложенное формально усложненное описание взаимозависимого группового выбора не помогает решать реальные проблемы анализа рыночного спроса.

Таким образом, современные теория ПС и ТЭР являются противоречивыми в позитивном отношении. Эти (и другие) противоречия рассматриваются как кризис экономической теории [25]. При этом ложная природа парадоксов агрегирования покупателей большинством исследователей спроса и экономического равновесия не учитывается или игнорируется. Известный успех применения прикладных моделей равновесия можно объяснить их высокой степенью агрегирования по числу товаров и групп покупателей. Так, в книге [51] приводятся или упоминаются результаты расчетов равновесия для экономик США, Австралии и Великобритании, где потребители рассматривались, как правило, консолидировано, или разбивались на группы

[1] С ростом цены любого продукта спрос на все другие продукты не убывает.

(до ста) по уровню доходов, регионам, типам семей. В российских моделях [21, 22] рассматривается совокупный спрос домохозяйств на один агрегированный товар.

Ситуация с агрегированием покупателей иллюстрирует суждение Вильфредо Парето, приводимое его учеником Морисом Алле[1] в методологической статье [2, с. 16] «История науки сводится к истории ошибок компетентных людей». Можно считать это суждение чрезмерно категоричным, но трудно не согласиться здесь с проявлением «тирании господствующих доктрин» [2, с. 15]. Развитие теории ПС и ТЭР, а также их приложений требует преодоления этой тирании.

3. Решение проблемы рыночного спроса. Существование коллективной функции полезности

3.1. В нашей книге 2001 года [7] и последующих работах [6, 9] предложен и обоснован пересмотр теории и моделирования рыночного потребительского спроса на основе концепции консолидированных потребителей исследуемого рынка как исходного объекта теории и математического моделирования. При этом мы учитываем, что индивидуальные потребители (домохозяйства) не являются независимыми (в силу традиций, моды, рекламы) и считаем адекватным описание их поведения (если это представляет интерес) дискретными стохастическими процессами. Рыночный спрос формируется на основе сложных синергетических процессов и должен рассматриваться как априорный объект экономической теории и математического моделирования. В отличие от [35, 36, 45], мы не считаем возможным или эффективным учитывать поведение всех покупателей реальных рынков.

Наш подход к описанию коллективного (группового или рыночного) спроса аналогичен естественнонаучному подходу к описанию макрообъектов — сплошных сред (газы, жидкости, твердые тела). Там используются дифференциальные уравнения, в то время как для описания микрообъектов — молекул и атомов — используется дискретный вероятностный аппарат (броуновское движение, квантовая механика).

Принятие ансамбля покупателей за исходный объект, действующий в соответствии с классическим принципом максимизации полезности или в соответствии с аксиомой Самуэльсона [8] снимает противоречия теории рыночного спроса, представляющего реальный интерес для экономических агентов. Это стимулирует развитие теории и практики построения аналитических (экономических) индексов спроса, учитывающих предпочтения потребителей. Это направление индексологии основано работой 1924 года советского экономиста-математика А. А. Конюса [18], развито в теоретическом отношении в зарубежных исследованиях (например, [50] и в Руководстве по индексу потребительских цен. Теория и практика, изданном МВФ в Вашингтоне в 2007 г.) и в прикладном — в [6, 10, 17], но до настоящего времени встречает непонимание и сопротивление специалистов, знакомых с «противоречиями» агрегирования покупателей.

3.2. Вопросом, нуждающимся в прояснении, является адекватность реальности модели рыночного спроса как априорного объекта. Далее мы ограничиваемся классическим принципом рациональности — максимизацией коллективной функции полезности на доступном множестве, определяемом совокупными расходами всех потребителей исследуемого рынка.

Пусть исследуется рынок n товаров и (или) услуг (благ). Наборы благ $x = (x_1, \ldots, x_n)$ с неотрицательными компонентами рассматриваются как элементы (векторы) пространства благ E^n_+. Этому же пространству будем относить векторы цен $p = (p_1, \ldots, p_n)$. Задана коллективная функция полезности $u(x)$ с областью определения E^n_+, обладающая стандартными свойствами: положительность при $x > 0$, возрастание и вогнутость. Для решения прикладных задач можно ограничиться регулярным случаем, когда максимизация $u(x)$ на доступном множестве, определяемом ценами p и расходами потребителей e, определяет однозначную, непрерывную и непрерывно дифференцируемую вектор-функцию спроса

$$x(p,e) = \arg\max\left\{u(x) : \langle p,x\rangle \le e,\ \ x \ge 0\right\}. \quad (1)$$

Этот спрос обладает следующими основными свойствами: 1) однородность нулевой степени, т. е. $x(\alpha p, \alpha e) = x(p, e)$, $\forall \alpha > 0$; 2) расходное тождество (закон Вальраса) $\langle p, e\rangle = e$; 3) матрица Слуцкого

$$S(p,e) = \frac{\partial x(p,e)}{\partial p} + \frac{\partial x(p,e)}{\partial e} x(p,e)$$

является отрицательно полуопределенной и симметричной, причем ее нуль-пространство определяется вектором цен p.

[1] Премия им. А. Нобеля по экономике 1998 года.

Функция полезности является искусственным объектом, удобным для построения теории спроса. Реальным объектом экономики является функция спроса. Соответственно, при построении теории спроса возник вопрос, какие аналитические свойства данной функции спроса $x(p, e)$ обеспечивают существование функции полезности $u(x)$, рационализирующей функцию спроса в смысле (1)? Эта проблема получила название проблемы интегрируемости функций спроса. Она была решена в работе Л. Гурвица и Х. Узавы [41]. Перечисленные три необходимых свойства интегрируемой функции спроса $x(p, e)$ оказались также достаточными условиями интегрируемости.

3.3. Аналитические условия интегрируемости Гурвица — Узавы трудны для построения рационализирующей функции полезности. Кроме того, реальный наблюдаемый рыночный спрос представляется не в аналитическом виде, а лишь конечным набором данных — торговой статистикой, т. е. ценами $p^t \in E^n_+$ и количествами продаж $x^t \in E^n_+$ за отчетные периоды:

$$\left\{p^t, x^t : t = \overline{0,\ T}\right\}. \qquad (2)$$

Эти данные определяют также потребительские расходы $e_t = \langle p^t, x^t \rangle$.

Для преодоления трудностей, связанных с отсутствием в 1930-х годах методов построения функций полезности, адекватных конкретным потребителям, представленным статистикой (2), Самуэльсон в работе 1938 г. [49] (после выхода статьи Вальда [55]) предложил альтернативную аналитической классической теории спроса алгебраическую теорию на основе понятия выявленного предпочтения. Согласно утвердившейся традиции он рассмотрел изолированного потребителя (*the theory of consumer's behaviour*). Однако ничто не препятствует применить введенные Самуэльсоном и его последователями понятия и выводы к рыночной статистике (2). Изложим основные факты этой теории, следуя [46].

Пусть даны два набора «цена — количество» (p^r, x^r) и (p^s, x^s) из наблюдений (3.2).

Определение 1. Набор благ x^r, купленный при ценах p^r, называется выявленно предпочтительным набору x^s, если набор x^s также мог быть куплен при ценах p^r, т. е. $\langle p^r, x^s \rangle \le \langle p^r, x^r \rangle \equiv e_r$.

Самуэльсон предложил на базе этого понятия альтернативный принцип рациональности в виде утверждения, названного им аксиомой выявленного предпочтения. Позже, после исследования этого принципа Х. Хаутеккером [40], аксиома Самуэльсона была названа слабой аксиомой ВП.

Слабая аксиома ВП. Если набор x^r выявленно предпочтителен другому набору x^s, то набор x^s не может быть выявленно предпочтителен набору x^r, т. е.

если $\langle p^r, x^s \rangle \le \langle p^r, x^r \rangle$ и $x^r \ne x^s$, то

$$\langle p^s, x^r \rangle > \langle p^s, x^s \rangle. \qquad (3)$$

Слабая Аксиома легко переносится на функции спроса $x(p, e)$. При этом сравниваются две произвольные ситуации «цена — расходы» (p, e) и (p', e'), и импликация (3.3) принимает вид

если $\langle p, x(p', e') \rangle \le e$ и $x(p', e') \ne x(p, e)$, то

$$\langle p', x(p, e) \rangle > e'. \qquad (4)$$

Известно [40, 46], что если однозначный спрос $x(p, e)$ интегрируемый, то он удовлетворяет слабой аксиоме[1]. Однако Хаутеккером было установлено, что выполнение слабой аксиомы достаточно для интегрируемости спроса только для рынка двух товаров, и при $n \ge 3$ может существовать неинтегрируемый спрос, удовлетворяющий аксиоме Самуэльсона. При этом он нашел необходимое и достаточное условие интегрируемости спроса $x(p, e)$ в терминах выявленного предпочтения, построив рекурсивное замыкание слабой аксиомы ВП — сильную аксиому ВП.

3.4. Результат Хаутеккера имеет важное теоретическое значение, однако он плохо приспособлен для проверки выполнения сильной АВП для рыночного спроса, представленного торговой статистикой (2), и, соответственно, существования коллективной функции полезности $u(x)$, рационализирующей данные (2) в смысле равенств

$$u(x^t) = \max\left\{u(x) : \left\langle p^t, x \right\rangle \le e_t,\ x \ge 0\right\},\ t = \overline{0,\ T}. \qquad (5)$$

Если функция полезности, рационализирующая данные (2), существует, то соответствующий рыночный спрос $x(p, e)$ удовлетворяет сильной, а значит и слабой АВП. Вопрос о рационализируемости (5) торговой статистики (2) решается непараметрическим методом Афри-

[1] Обозначим $x = x(p, e)$, $x' = x(p', e')$, $e = \langle p, x \rangle$, $e' = \langle p', x' \rangle$ и $u(x)$ — порождающая функция полезности. Пусть $\langle p, x' \rangle \le e$ и $x \ne x'$. В силу однозначности спроса $u(x') < u(x)$, откуда следует, что набор x недоступен в ситуации (p', e'), т. е. $\langle p', x \rangle > e'$, т. е. выполняется (4).

ата — Вэриана [31, 54]. Этот метод построен в рамках стандартной теории индивидуального потребительского поведения (*the behavior of the consumer* [31, p. 67]), однако очевидно, что он может применяться и реально применяется для анализа рыночного спроса. Приведем основной результат этого эффективного метода.

Введем перекрестные стоимости e_{ts} статистических наборов $\{x^s\}$ из (2) и кросс-коэффициенты Африата a_{ts}:

$$e_{ts} = \left\langle p^t, x^s \right\rangle,\ a_{ts} = e_{ts} - e_t,\ s,t = \overline{0,T}. \quad (6)$$

Анализ матрицы Африата $A = \left\{ a_{ts} : s,t = \overline{0,T} \right\}$ (с диагональными элементами $a_{tt} = 0$) позволяет легко проверить выполнение слабой аксиомы для статистики (2). Действительно, импликация (3) в терминах кросс-коэффициентов (6) принимает вид: если $a_{rs} \le 0$ и $x^r \ne x^s$, то $a_{rs} > 0$. Однако теорема Африата позволяет выяснить вопрос, существует ли функция полезности $u(x)$, рационализирующая статистику (2)? Более того, ответ дается в конструктивной форме.

Введем числа Африата — значения искомой функции $u(x)$ и множителя Лагранжа задачи (1) $\lambda(p, e)$ на данных (2):

$$u_t = u(x^t),\ \lambda_t = \lambda(p^t, e_t). \quad (7)$$

Согласно теореме Африата [31], непрерывная, возрастающая, вогнутая функция полезности, рационализирующая данные (2), существует тогда и только тогда, когда существует положительное решение $\{u_t, \lambda_t\}$ неравенств

$$u_s - u_t - \lambda_t a_{ts} \le 0,\ s,t = \overline{0,T},\ s \ne t. \quad (8)$$

Система неравенств Африата (8) может быть несовместной как вследствие погрешностей исходных данных, так и в силу неадекватности классической модели спроса данному рынку. Это требует регуляризации задачи положительного решения этой системы на основе дополнительной информации об искомом решении (неоднозначном в совместном случае) и учете уровня погрешностей данных. Эти вопросы освещены в работах [6, 10, 16].

Африат также нашел для совместного случая кусочно-линейную рационализирующую функцию, однако такая функция недифференцируема и порождает многозначное отображение спроса, неудобное для прикладных целей. В силу приближенности исходных данных (2), а также принципиальной приближенности математических моделей, очевидно, можно сузить класс искомых функций до достаточно богатого параметрического класса регулярных функций и оценивать параметры методом наименьших квадратов для интерполяционной системы, вытекающей из определений (7) и условия экстремума для регулярной задачи (1):

$$u(x^t) = u_t,\quad \frac{\partial u(x^t)}{\partial x} = \lambda_t p^t.$$

Вопросы построения дифференцируемых функций полезности освещены в [6, 11].

Несмотря на заявленность непараметрического метода для анализа индивидуального потребительского поведения, уже в статье Вэриана [54] этот метод применен без каких-либо дополнительных обоснований для оценки верхней и нижней границ «истинного индекса стоимости жизни» Конюса для статистики совокупного потребления в США в 1947–1978 гг. В недавней работе [53] Вэриан пишет: «К моему удивлению, агрегированные данные о потреблении легко удовлетворяли условиям выявленного предпочтения». Наш опыт [10, 16, 17] использования метода Африата — Вэриана для построения инвариантных [50] и квазиинвариантных [6] индексов для модельных (см. «Руководство по индексу потребительских цен. Теория и практика», изданное МВФ в Вашингтоне в 2007 г.) и реальных данных современных рынков также демонстрирует во всех случаях соответствие коллективного потребительского поведения классической модели максимизации полезности. Известны работы других исследователей для построения инвариантных индексов рыночного спроса непараметрическим методом. Остается недоумевать по поводу удивления известного исследователя потребительского поведения, существенно развившего метод Африата в математическом и алгоритмическом отношениях.

Таким образом, эффективность метода Африата — Вэриана для проверки существования и построения коллективной функции полезности, рационализирующей торговую статистику (2), подтверждена положительным опытом его применения к реальным данным.

Простая модификация теории рыночного спроса [6, 7] соответствует ее истокам в XIX в., когда основные законы потребительского выбора выявлялись основателями (Курно, Энгель, Госсен, Джевонс, Менгер) с помощью статистического анализа покупок у торговцев и записей годовых бюджетных расходов семей,

сгруппированных по значениям их доходов. Соответственно, кризисное состояние теории ПС и ТЭР в части моделирования рыночного спроса можно считать преодоленным. В заключение статьи [9] отмечено, что такая модификация сохраняет существование и обеспечивает единственность экономического равновесия в основных моделях. Более того, это делает известные модели равновесия вычислимыми. В следующих двух разделах продемонстрируем это на модифицированной модели Касселя — Вальда.

4. Модель Касселя — Вальда и ее эволюция

Существенным отличием и преимуществом модели экономического равновесия Касселя — Вальда [55] и ее модификаций [3, 20, 38] от модели Эрроу — Дебре [33], вытеснившей это семейство моделей в основном потоке работ по ТЭР, является консолидированное представление как о покупателях, так и о производителях продукции конечного потребления.

Исследования Касселя и его последователей, представленные в данном разделе, относятся к полностью децентрализованной экономике Смита — Вальраса [4]. Производственная система такой экономики должна считаться консолидированным представлением независимых агентов-производителей (фирм), максимизирующих стоимости своих выпусков при данных ценах. Нетрудно убедиться, что совокупное предложение фирм, максимизирующих стоимости выпусков, совпадает с предложением всей производственной системы, максимизирующей стоимость общего выпуска (см. гл. 3, §3 в [5], [3, с. 134]). Соответственно, ничто не мешает считать, что излагаемые ниже модели, где рациональность производства выражается (в исходном варианте [55] неявно) максимизацией стоимости валового выпуска, представляют также более реальные смешанные экономики с общими рыночными ценами. Аналогично, правило формирования бюджета потребителей, интерпретируемое Касселем и его последователями как следствие частной собственности потребителей на производственные факторы, очевидно, распространяется и на смешанную экономику с государственной собственностью и трансфертами.

Представим вначале основной результат Вальда [55]. В экономике имеется m факторов производства в положительных количествах $r \in E^m_{++} \equiv \left\{ r \in E^m : r_i > 0, i = \overline{1,m} \right\}$, которые используются для производства n конечных продуктов в неотрицательных количествах $x \in E^n_+$. Для производства единицы продукта j требуется $a_{ij} \geq 0$ единиц фактора i. Эти коэффициенты определяют удельные производственные затраты факторов и составляют технологическую матрицу $A = \{a_{ij}\}$ размерностей $(m \times n)$. Цены продуктов составляют вектор $p \in E^n_+$ и цены факторов — вектор $q \in E^m_+$.

Агент «производство» описывается системой уравнений

$$r = Ax + u, \tag{9}$$

где неотрицательные переменные $u \in E^m_+$ обозначают неиспользуемые при выпуске x количества факторов. Цены продуктов p_j равны их удельной себестоимости, и цены q_i неполностью используемых факторов ($u_i > 0$) нулевые:

$$p_j = \sum_{i=1}^{m} q_i a_{ij},\ j = \overline{1,n},\ u_i q_i = 0,\ i = \overline{1,m}. \tag{10}$$

Агент «потребление» описывается обратной функцией рыночного спроса — зависимостью цен продуктов от количеств продаж:

$$p = f(x). \tag{11}$$

Каждая модель экономики порождает специальное определение равновесия, основанное на требованиях рациональности выделенных агентов и бездефицитности рынка, в частности — равенстве спроса и предложения. Вальд не вводил явно понятие равновесия для системы (9)–(11). Позже было выявлено [55], что подсистема (9), (10) неявно выражает цель производства — максимизацию стоимости выпуска x в ценах p, а рациональность ансамбля покупателей представлена равенством (11), где спрос x совпадает с предложением производства (9).

Таким образом, равновесием экономики Касселя — Вальда является неотрицательное решение системы (9)–(11) $2m + 2n$ уравнений относительно $2m + 2n$ переменных (x, u, p, q). При этом существенной частью этого набора является тройка (x, p, q), а неиспользуемые количества факторов u определяются однозначно из (9). Вальд доказал существование равновесной тройки (x^*, p^*, q^*), причем с единственной парой (x^*, p^*), при следующих (основных) условиях:

1. Для каждого j существует i: $a_{ij} > 0$;
2. Если $x^k \to \hat{x}^j$ при $k \to \infty$ и при этом $\hat{x}^j_j = 0$, то $p^k_j = f_j(x^k) \to \infty$;

Для любых двух пар (x, p) и (x', p'), где $p = f(x)$ и $p' = f(x')$, выполнено:

если $\langle p, x' - x\rangle \le 0$ и $x' \ne x$, то

$$\langle p', x - x'\rangle > 0. \qquad (12)$$

Смысл первого условия: производство каждого продукта требует использования некоторого фактора. Второе условие, называемое также граничным условием спроса, в терминах прямого спроса $x = f^{-1}(p)$ выражает стремление спроса на любой продукт к нулю при неограниченном возрастании его цены. Третье условие (12) (в оригинале [55] — шестое условие) формально эквивалентно аксиоме Самуэльсона (3).

Для обеспечения единственности равновесных цен факторов q^* Вальд ввел дополнительное условие линейной независимости строк матрицы A (при $m \le n$), обеспечивающее единственность решения первой системы (10) относительно q.

Замечательно, что условия (10) предвосхитили условия дополнительности в созданной вскоре теории ЛП (см. [5], гл. 5 в [13], §9.1 в [24]), и вместе с исходной системой (9) они обеспечивают равенство стоимостей выпускаемых продуктов и используемых ресурсов[1]:

$$\langle p, x\rangle = \langle p, q\rangle. \qquad (13)$$

Теория ЛП была впервые применена к модели (9)–(11) в статье Г. Куна [19], где было показано, что вместо системы (9), (10) можно рассмотреть задачу ЛП, представляющую рациональность производственной системы — максимизацию стоимости выпуска при факторных ограничениях:

$$X(p) = Arg \max_x \left\{\langle p, x\rangle : Ax \le r, x \ge 0\right\}. \qquad (14)$$

Характеристики Вальрасова равновесия (10) и (13) вытекают из теории двойственности для ЛП. Двойственная к (14) задача имеет вид

$$Q(p) = Arg \min_q \left\{\langle r, q\rangle : A^T q \ge p, q \ge 0\right\}. \qquad (15)$$

Эта задача определяет цены факторов q при заданных ценах p. Цены q_i также являются «объективно обусловленными оценками» факторов r_i Л. В. Канторовича [14].

Равновесная пара (x^*, p^*) в представлении Куна модели Касселя — Вальда определяется условиями (11), где выпуск продуктов является решением задачи (14):

$$x^* \in X(p^*),\ p^* = f(x^*). \qquad (16)$$

Как известно, пара двойственных задач ЛП (14) и (15) разрешима или неразрешима одновременно, и в случае разрешимости их оптимальные значения совпадают, что выражено равенством двойственности (13) с учетом допустимости векторов выпуска и цен ресурсов. Соответственно, решение задач (14) и (15) эквивалентно решению системы линейных неравенств

$$Ax \le r;\ x \ge 0;\ A^T q \ge p;\ q \ge 0;\ \langle p, x\rangle = \langle r, q\rangle \qquad (17)$$

относительно переменных (x, q) при заданных параметрах (p, r). Кроме того, пара решений (x, q) удовлетворяет условиям дополнительности:

$$q_i\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - r_i\right) = 0,\ i = \overline{1,m};$$

$$\left(\sum_{i=1}^{m} q_i a_{ij} - p_j\right)x_j = 0,\ j = \overline{1,n}. \qquad (18)$$

При этом цены q_i неполностью используемых факторов r_i должны быть нулевыми, и выпуск продукта x_j, цена которого p_j ниже себестоимости $\sum q_i a_{ij}$, также нулевой. Второе условие дополнительности (18) соответствует второму свойству равновесия Вальраса, отмеченному в п. 2.2. Равенство двойственности (13) является стандартной формой закона Вальраса, означающего, что потребители расходуют весь свой бюджет $\langle r, q\rangle$.

Переход от системы (9), (10) к задаче ЛП (14) позволил Куну заменить громоздкое доказательство Вальда, основанное на условии (12), на более короткое, основанное на теореме Какутани о существовании неподвижной точки многозначного полунепрерывного сверху отображения компактного выпуклого допустимого множества задачи (14) «в себя». Он счел успехом свое доказательство существования равновесия без «искусственного» условия Вальда даже без гарантии единственности равновесия.

Следующим этапом развития модели Касселя — Вальда стала глава 13 из книги [38]. Ее автор Р. Солоу[2] отнесся к модели Касселя — Вальда и теореме Вальда критически в двух существенных для нас отношениях.

[1] Для вывода (13) следует умножить (скалярно) равенство (9) на вектор цен q и воспользоваться равенствами (10).

[2] Авторство Р. Солоу отмечается Куном в [19, с. 364].

Во-первых, он отметил [38, p. 367], что представление спроса через обратные функции (11) является экономически неправомерным (*economically illegitimate*), так как такой спрос не зависит от цен факторов, определяющих бюджет потребителей, и не отражает того, что в замкнутой экономике существенны лишь относительные цены. Соответственно, пара (p, q) должна определяться лишь с точностью до масштаба (спрос (11) этого не допускает). Для преодоления этого несоответствия вместо обратной функции спроса (11) была введена функция рыночного спроса

$$x = F(p, q) \qquad (19)$$

по предположению однозначная, непрерывная и положительно однородная нулевой степени. Последнее свойство отражает инвариантность спроса относительно масштаба цен.

Во-вторых, Солоу (и его соавторы Дорфман и Самуэльсон) отклонили условие Вальда (12), поскольку «рациональность не может требоваться от функций рыночного спроса» [38, p. 368]. Ошибочность такого отрицания достаточно, с нашей точки зрения, объяснена в предыдущих разделах данной статьи.

Кроме того, в гл. 13 в [38] была исследована экономика с переменными значениями факторов r и различными технологиями для каждого продукта. Предложение факторов определяет бюджет потребителей $\langle r, q\rangle$ и, в свою очередь, определяется некоторой функцией

$$r = G(p, q). \qquad (20)$$

Аналитические свойства этой функции подобны свойствам функции (19): непрерывность и положительная однородность нулевой степени. Однако характер монотонности функций спроса (19) и предложения (20) противоположный. В отличие от теории потребительского спроса, содержательная теория «потребительского предложения» нам не известна.

Система (17), (19) и (20) определяет цены (p, q) с точностью до масштаба. При этом оказалось удобным наложить условие на цены:

$$\sum_{j=1}^{n} p_j + \sum_{i=1}^{m} q_i = 1, \quad p \geq 0, \quad q \geq 0. \qquad (21)$$

Это соответствует схеме Вальраса, определяющей относительные цены.

Существование равновесия (x^*, r^*, p^*, q^*) в модели Вальда — Солоу (17), (19)–(21), как и в [19], было доказано с использованием теории двойственности и теоремы Какутани. Последняя, в отличие от схемы Куна, применена к отображению в себя симплекса цен (21).

Итак, замена обратного спроса (11) на прямой спрос (19) и введение функции предложения факторов (20) являются безусловным достижением математического моделирования экономического равновесия. Известно также развитие (см. п. 9.2 в [13]) модели Вальда — Солоу на основе использования части продуктов для производственного потребления. При этом ограничения задачи (14) дополняются системой «затраты — выпуск» В. Леонтьева. Соответственно, усложняется двойственная задача (15).

Однако отрицание экономической значимости Условия Вальда и его теоремы, является ошибочным[1]. Эта методологическая ошибка легко устраняется на основе концепции рыночного спроса как априорного объекта моделирования, позволяющей модифицировать модель Вальда — Солоу и ввести ее в класс прикладных вычислимых моделей равновесия.

5. Модель Вальда — Солоу с коллективной функцией полезности

Уточним вариант модели Касселя — Вальда — Солоу (гл. 13 в [38]), представляя рыночный спрос (19) через модель максимизации коллективной функции полезности (1). Это эффективнее в теоретическом и — особенно — прикладном отношениях, так как n-мерные функции спроса на практике наблюдаются в виде торговой статистики (2), и их прямая оценка с учетом приведенных в п. 3.2 свойств интегрируемости существенно сложнее, чем построение скалярной функции полезности, рационализирующей данную статистику.

Ввиду отсутствия нетривиальной теории и методов построения функций предложения факторов их количества r, как и в базовой модели [55], будем считать фиксированными. Вместо функции спроса Солоу (19) введем регулярную непрерывно дифференцируемую коллективную функцию полезности $u(x)$, порождающую в соответствии с моделью (1) рыночный однозначный спрос $x(p, e)$. Этот спрос, как отмечено в п. 3.2, является однородной функцией нулевой степени и удовлетворяет закону Вальраса. Для модели равновесия также существенно, что он также удовлетворяет слабой АВП (4).

[1] Вальд верил в это условие для рыночного спроса [55, p. 375].

В любой экономике Вальраса потребители расходуют для покупки выпускаемой продукции весь свой бюджет. В экономике Касселя — Вальда совокупный бюджет потребителей равен стоимости факторов производства r в ценах q, т. е.

$$e = \langle q, r \rangle. \qquad (22)$$

Таким образом, функция Солоу (19) уточняется как $F(p, q) = x(p, \langle q, r \rangle)$ и модель экономики состоит из описания агента «производство» задачей ЛП (14) и агента «потребление» — задачей выпуклого программирования (1) и бюджетным равенством (22).

Соотношения двойственности (17), (18) содержат как саму «производственную» задачу (14), так и правило ценообразования на ресурсы. Задача равновесия ставится относительно цен (p, q) и выпуска продуктов x, который является одновременно потребительским спросом и производственным предложением.

Определение 2. Набор продуктов, цен продуктов и производственных факторов (x^*, p^*, q^*) составляет рыночное равновесие в экономике (14), (1) и (22), если

$$x^* = x(p^*, \langle q^*, r \rangle) \in X(p^*) \qquad (23)$$

Закон Вальраса здесь выполняется тривиально в силу равенства спроса и предложения.

Теорема. Пусть в экономике (14), (1), (22) технологическая матрица A не содержит нулевых столбцов, т. е. производство каждого продукта требует использования некоторого фактора, и существует коллективная функция полезности $u(x)$, порождающая однозначный спрос $x(p, e)$. Тогда существует рыночное равновесие $\{x^*, p^*, q^*\}$, в котором набор продуктов и их цены $\{x^*, p^*\}$ определены однозначно, а цены факторов q^* являются решением задачи ЛП (15), где $p = p^*$. Если при этом ранг матрицы A равен числу факторов m, то цены факторов q^* определены однозначно.

Эта новая теорема существования и единственности равновесия в модифицированной модели Касселя — Вальда — Солоу (14), (1), (22) не нуждается в специальном доказательстве. Новая модель является уточнением (сужением) модели Солоу (14), (19), (22), для которой доказано существование равновесия, причем без условия Вальда[1]. Следовательно, в модификации (14), (1), (22) равновесие существует. Спрос $x(p, e)$, порождаемый регулярной функцией полезности, удовлетворяет условию Вальда (12), обеспечивающему единственность равновесной пары $\{x^*, p^*\}$[2]. Единственность цен q^* в случае линейной независимости строк матрицы A пояснена в п. 4.

Модель (14), (1), (22) использует данные о производстве в виде технологической матрицы A и данные о потребителях — коллективную функцию полезности $u(x)$. Оба эти объекта могут быть оценены по стандартной производственной и торговой информации, собираемой статистическими службами. Модель производства близка к линейным моделям «затраты — выпуск» Леонтьевского типа, которые давно используются для анализа и регулирования экономик развитых стран (в том числе использовались в СССР). Методы построения коллективных функций полезности по торговой статистике (2) развиваются в последние десятилетия. Это классический параметрический метод и непараметрический метод Африата — Вэриана, кратко представленный в п. 3.4. В наших работах (в гл. 6 в [6] и в [11]) также развиваются комбинированные методы построения дифференцируемых функций полезности, сочетающие преимущества обоих подходов. Отметим опыт построения и использования агрегированных функций полезности (без обсуждения проблем агрегирования покупателей) в прикладных моделях равновесия [21, 22, 51]. Этот опыт прикладного моделирования базовых экономических процессов — производства, потребления и равновесия — позволяет утверждать, что предложенная модификация модели Касселя — Вальда помимо обоснованности существования и единственности равновесия, обладает хорошим прикладным потенциалом и может считаться вычислимой моделью экономического равновесия.

Остановимся на вопросах вычисления равновесия (23). Из предыдущего анализа следует, что нахождение равновесия (23) эквивалентно решению системы (14) совместно с задачей (1), (22), т. е. при $x = x(p, \langle q, r \rangle)$. Необходимое и достаточное условие для решения этой задачи дает теорема Куна — Таккера (см. п. 4.3 в [13]), согласно которой решение удовлетворяет системе

[1] Доказательство для (14), (19) (модели с постоянными количествами используемых факторов) приведено в [3, с. 141-46].

[2] Предположим, имеется две равновесных пары $\{x', p'\}$ и $\{x'', p''\}$, $x' \neq x''$. Тогда $x' \in X(p')$ и $x'' \in X(p'')$. Так как допустимые множества задач $X(p)$ одинаковы (не зависят от p), то $\langle p', x'' \rangle \leq \langle p', x' \rangle$ и $\langle p'', x' \rangle \leq \langle p'', x'' \rangle$, что противоречит условию (12)

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x} \le \lambda p, \quad \left[\frac{\partial u(x)}{\partial x} - \lambda p\right] x = 0, \qquad (24)$$

где $\lambda \ge 0$ — множитель Лагранжа. Кроме того, точка x должна быть допустимой для задачи (1). В силу равенства (22) это эквивалентно выполнению закона Вальраса (13). Наконец, в силу однородности задачи равновесия относительно цен (p, q), они определяются лишь относительно, что учитывается симплексным ограничением (21). Здесь достаточно использовать равенство

$$\sum_{j=1}^{n} p_j + \sum_{i=1}^{m} q_i = 1. \qquad (25)$$

Таким образом, поиск равновесия модели (14), (1), (22) сводится в общем случае к решению системы уравнений и неравенств (17), (24), (25) относительно набора неотрицательных переменных $\{x, p, q, \lambda\}$. При выполнении всех условий сформулированной выше теоремы решение этой системы существует и единственно. Оно может быть найдено различными методами нелинейного программирования, например, минимизацией функции штрафа нелинейной подсистемы (24) при линейных ограничениях (13), (17), (25) и $\lambda \ge 0$.

В невырожденном случае $x^* > 0$, когда все продукты производятся и продаются, система равновесия упрощается благодаря соотношениям дополнительности (18) и (24). При этом система (24) принимает вид

$$Ax \le r,\ x \ge 0,\ A^T q = p,\ q \ge 0, \quad p,x\ =\ r,q$$

$$\langle p, x \rangle = \langle r, q \rangle, \qquad (26)$$

и система неравенств (24) переходит в равенство

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x} = \lambda p, \qquad (27)$$

где $\lambda \ge 0$.

В этом случае следует решить систему (25)–(27) с условием $p \ge 0$.

6. Заключение

Абрахам Вальд был первым, кто нашел эффективное подтверждение второй гипотезы Вальраса о существовании и единственности общего экономического равновесия в модели Вальраса — Касселя с консолидированным представлением как производства, так и потребителей благ. Хотя и непоследовательно, обойдя первую гипотезу (о рыночном спросе), но не отрицая ее. Он разделял ошибочное, как оказалось позже, представление Вальраса, Хикса и других вполне компетентных исследователей о подобии свойств рыночного спроса и спроса индивидуального. Эта ошибка была выявлена в 1953 г. У. Горманом, но неестественный эффект выпрямления «кривых» Энгеля при агрегировании покупателей, необходимый для существования коллективной функции полезности, рационализирующей рыночный спрос, не был осознан исследователями в достаточной степени. До настоящего времени продолжаются поиски философского камня — условий на индивидуальные предпочтения и распределение доходов, обеспечивающих существование коллективной функции полезности.

Исследователи проблемы экономического равновесия (К. Эрроу, Д. Дебре и их последователи) шли своим путем, не обращая внимание на парадокс агрегирования Гормана, и пришли к подобному парадоксу в 1972–1974 гг. в иной форме, в терминах избыточного спроса (Х. Зонненшейн, Р. Мантель, Д. Дебре). Характерно, что Зоннен-шейн после этого прекратил свои исследования по теории равновесия, считая их бессмысленными в силу отсутствия единственности и сравнительной статики. Можно сказать, что он стал неявной и добровольной «жертвой тирании» идеи Вальраса о структуре рыночного спроса, принявшей форму «господствующей доктрины» [2].

Как правило, парадоксы и ошибки в науке объясняются и устраняются через некоторое время. Мы показали это, обратившись к истокам формирования теории потребительского спроса и накопленному опыту эвристического или обоснованного опыта работы с реальной информацией о рыночном спросе в рамках теории спроса и непараметрического метода решения задачи построения функции полезности, созданных, согласно господствующей до настоящего времени доктрины, для индивидуального потребителя. Решение оказывается простым. Ансамбль потребителей рынка (частичного или тотального) следует считать исходным объектом построения теории и математических моделей спроса [7].

Пересмотр в нашей статье модели Касселя — Вальда и теоремы Вальда в рамках новой концепции рыночного спроса с учетом модификации Солоу [38] придает этим результатам прикладное значение. Обновленная модель

Касселя — Вальда с коллективной функцией полезности может использоваться в качестве обоснованной вычислимой модели равновесия, расширяющей возможности количественного экономического анализа. Эта модель легко обобщается переходом от классической модели спроса к новой обобщенной аналитической модели спроса [8], основанной на векторном поле предпочтений. Спрос такой модели удовлетворяет Слабой Аксиоме и расширяет область применимости к реальным рынкам. Этому обобщению мы предполагаем посвятить специальную статью, также как и модификации модели Эрроу — Дебре на основе нашей концепции рыночного спроса.

7. Благодарности

Автор благодарит Минобразования РФ за финансовую поддержку данного исследования и В. И. Зоркальцева за плодотворные дискуссии, стимулирующие написание данной статьи.

Список источников

1. *Алипрантис К., Браун Д., Беркеншо О.* Существование и оптимальность конкурентного равновесия. — М.: Мир, 1995.

2. *Алле М.* Современная экономическая наука и факты // THESIS. — 1994. –Т.2. — Вып. 4. — С. 11-19.

3. *Ашманов С. А.* Математическая экономика. — М.: Наука, 1984.

4. *Вальрас Л.* Элементы чистой политической экономии. — М.: Изограф, 2000.

5. *Гейл Д.* Теория линейных экономических моделей. — М.: ПИЛ, 1963.

6. *Горбунов В. К.* Математическая модель потребительского спроса. Теория и прикладной потенциал. — М.: Экономика, 2004.

7. *Горбунов В. К.* Математическая модель потребительского спроса: учебное пособие. — Ульяновск: Изд-во УлГУ, 2001.

8. *Горбунов В. К.* Модель потребительского спроса, основанная на векторном поле предпочтений // Вестник Московского университета. — 2009. –№ 1. — С. 67-79. (6. Экономика).

9. *Горбунов В. К.* Особенности агрегирования потребительского спроса // Журнал экономической теории. — 2009. — №1. — С. 85-94.

10. *Горбунов В. К., Козлова Л. А.* Построение и исследование квазиинвариантных индексов потребления // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. — 2008. — № 3(19). — С. 120-27.

11. *Горбунов В. К., Македонский К. С.* Построение дифференцируемых функций полезности, рационализирующих торговую статистику // Проблемы экономики, финансов и управления производством : сб. науч. трудов вузов России. — Иваново, 2003. — С. 278-85.

12. *Зоркальцев В. И.* Проблема агрегирования экономических субъектов // Вестник Новосибирского гос. ун-та. — 2010. — Т. 10. — Вып. 1. — С. 107-108. (Социально-экономические науки).

13. *Интрилигатор М.* Математические методы оптимизации и экономическая теория. — М.: Прогресс, 1975.

14. *Канторович Л. В.* Экономический расчет наилучшего использования ресурсов. — М.: Изд-во АН СССР, 1959.

15. *Кассель Г.* Основные идеи теоретической экономии [Нем. ориг. — 1918]. Л. : Прибой, 1929.

16. *Козлова Л. А.* Алгоритмы и программы построения инвариантных и квазиинвариантных индексов потребительского спроса : дисс. … канд. техн. наук. — Ульяновск : УлГУ, 2010.

17. *Козлова Л. А.* Опыт применения квазиинвариантных индексов потребления // Журнал экономической теории. — 2009. — № 2. — С. 276-79.

18. *Конюс А. А.* Проблема истинного индекса стоимости жизни [публ. с оригинала 1924 г.] // Экономика и математические методы. — 1989. — Т.27. — №3. — С. 435-444.

19. *Кун Г. У.* Об одной теореме Вальда [Публ. с англ. оригинала 1956 г.] // Линейные неравенства и смежные вопросы / Ред. Кун Г.У., Таккер А.У. — М.: Ин. лит, 1958. — С. 363-371.

20. *Ланкастер К.* Математическая экономика. — М.: Советское радио, 1972.

21. *Макаров В. Л., Бахтизин А. Р., Бахтизина Н. В.* Вычислимая модель экономики знаний // Экономика и математические методы. — 2009. — Т. 45. — №1. С. 70-82.

22. *Макаров В. Л., Бахтизин А. Р., Сулакшин С. С.* Применение вычислимых моделей в государственном управлении. — М.: Научный эксперт, 2007.

23. *Маршалл А.* Принципы экономической науки. Т. 1. — М.: Прогресс, 1993.

24. *Никайдо Х.* Выпуклые структуры и математическая экономика. — М.: Мир, 1972.

25. *Полтерович В. М.* Кризис экономической теории // Экономическая наука современной России. — 1998. — №1, 46-66.

26. *Полтерович В. М.* Экономическое равновесие и хозяйственный механизм. — М. : Наука, 1990.

27. *Попов Е. В., Лесных В. В.* Специфические издержки в теории институциональных матриц // Журнал экономической теории. — 2007. — № 1. — С. 99-118.

28. *Самуэльсон П. А.* Основания экономического анализа. — СПб.: Экономическая школа, 2002.

29. *Хикс Дж. Р.* Стоимость и капитал : пер. с англ. [Оригинал — 1939 г.]. — М.: Прогресс, 1993.

30. *Черемных Ю. Н.* Микроэкономика. Продвинутый уровень. — М. : Инфра-М, 2008.

31. *Afriat S. N.* The construction of utility functions from expenditure data // International Economic Review. — 1967. — Vol. 8. — No 1. — P. 67-77.

32. *An P. T., Binh V. T. T.* Stability of excess demand functions with respect to a strong version of Wald's Axiom // Asia-Pacific Journal of Operational Research. — 2009. — V. 26(04). — P. 523-532.

33. *Arrow K. J., Debreu G.* Existence of an equilibrium for a competitive economy // Econometrica. — 1954. — V. 22. — 265-290.

34. *Brown D., Kubler F.* Computational Aspects of General Equilibrium Theory: Refutable Theories of Value [Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, 604]. — Springer : Berlin-Heidelberg, 2008.

35. *Chiappori P.-A., Ekeland I.* The microeconomics of efficient group behavior. Identification // Econometrica. — 2009. — V. 77. — P. 763-799.

36. *Chiappori P.-A., Ekeland I.* The microeconomics of group behavior. General characterization // Journal of Economic Theory. — 2006. — V. 130. — P. 1-26.

37. *Chipman, J. S.* Aggregation and estimation in the theory of demand // History of Political Economy. — 2006. — V. 38. — P. 106-129.

38. *Dorfman R., Samuelson P., Solow R.* Linear Pogramming and Economic Analysis. — N.Y. : McGraw-Hill, 1958.

39. *Gorman W. M.* Community preference fields // Econometrica. — 1953. — V. 21, № 1. — P. 63-80.

40. *Houthakker H. S.* Revealed preference and the utility function // Economica. — 1950. — Vol. 17. — P. 159-174.

41. *Hurwic L., Uzawa H.* On the integrability of demand functions // Preference, Utility and Demand / Eds. J. S. Chipman et al. — New York: Harcourt, Brace, Jovanovich, 1971. — P. 6, 114-148.

42. *Jerison M.* Dispersed excess demands, the weak axiom and uniqueness of equilibrium // Journal of Mathematical Economics. — 1999. — Vol. 31. — P. 15-48.

43. *John R.* Abraham Wald's equilibrium existence proof reconsidered // Economic Theory. — 1999. — Vol. 3. — P. 417-428.

44. *Kihlstrom R., Mas-Colell A., Sonnenschein H.* The demand theory of the weak axiom of revealed preference // Econometrica. — 1976. — Vol. 44. — № 5. — P. 971-978.

45. *Kirman A.* Whom or what does the representative individual represent? // Journal Economic Perspectives. — 1992. — №2. — P. 117-136.

46. *Mas-Colell A., Whinston M., Green J.* Microeconomic Theory. — New York : Oxford University Press, 1995.

47. *Quah J. K.* The existence of equilibrium when excess demand obeys the weak axiom // Nuffield College Economics Working Paper. — 2004. — Vol. 07.

48. *Quah J. K.* Weak axiomatic demand theory // Economic Theory. — 2006. — Vol. 29. — P. 677-699.

49. *Samuelson P. A.* A note on the pure theory of consumer's behaviour // Economica, New Series. — 1938. — Vol. 5. — №17. P. 61-71.

50. *Samuelson P. A., Swamy S.* Invariant economic index numbers and canonical duality. Survey and synthesis // The American Economic Review. — 1974. — Vol. 64. — № 4. P. 566-593.

51. *Shoven J. B., Whalley J.* Applying General Equilibrium. — Cambridge University Press.

52. *Sonnenschein H.* Market excess demand functions // Econometrica. — 1972. — Vol. 40. — №3. P. 549-563.

53. *Varian H.* Revealed preference // Samuelsonian Economics and the 21-st Century / Eds. M. Szenberg et al. — Oxford : Oxford University Press, 2006.

54. *Varian H.* The nonparametric approach to demand analysis // Econometrica. — 1982. — Vol. 50. — №4. — P. 945-973.

55. *Wald A.* On some systems of equations of mathematical economics. [Translation from the German original dated 1936] // Econometrica. — 1951. — No 19. — P. 368-403.

УДК 330.42; 519.865.3

ключевые слова: агрегирование покупателей, слабая аксиома, коллективная функция полезности, существование и единственность равновесия, модель Касселя — Вальда, вычислимые модели