ЖУРНАЛ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ №3/2011

ВЕРИФИКАЦИЯ ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ КАРДИНАЛИСТСКОЙ ПОЛЕЗНОСТИ[1]

А. Г. Дмитриев, Т. А. Козелецкая, Е. А. Герман

Верифицировано уравнение кардиналистской полезности. Получена плотность распределения персон по полезности потребления некоторого блага. С использованием уравнения кардиналистской полезности получена плотность распределения персон по доходам и проведено ее сравнение с эмпирическими данными.

В нашей работе [5] получено двухпараметрическое уравнение кардиналистской полезности

$$U = \sum_{i=1}^{N} k_i \ln \frac{x_i}{x_{i0}}, \qquad (1)$$

связывающее полезность (удовлетворенность) от потребления благ (U) с их количествами (x_i), в котором k_i — коэффициенты удовлетворения, x_{i0} — уровни нейтрального потребления каждого из благ. Экономический смысл x_{i0} состоит в следующем. При потреблении некоторого блага в количестве $x_i < x_i 0$ удовлетворение от потребления этого блага исчезает, и составляющая в общей полезности, обусловленная потреблением этого блага, становится отрицательной.

Это уравнение получено на основе учета особенностей психофизического восприятия количества в предположении аддитивности общей полезности. Отдельные слагаемые ее получены дифференциальным методом — рассмотрением связи между приращениями интересующих величин (приращением полезности и приращением количества потребленного блага). В качестве единицы для измерения приращения количества блага (dx_i) был выбран достигнутый (текущий) уровень его потребления (x_i) и сделано предположение о пропорциональности приращения полезности (du_i) этому приращению количества блага, что и позволило записать дифференциальное уравнение кардиналистской полезности $dU_i = k_i \frac{dx_i}{x_i}$. Из множества его решений, обусловленных появлением произвольной константы при интегрировании, было выбрано решение, удовлетворяющее требованиям корректной записи математических выражений с именованными величинами[2]. Это позволило устранить неопределенность, связанную с константой интегрирования, в отсутствии начальных и граничных условий.

Известно, что возможность использования того или иного уравнения в качестве математической модели рассматриваемого явления может быть установлена в результате его верификации. Следует отметить, что процедура верификации содержит в себе два этапа. Первый — формальная верификация, основанная на требованиях корректной записи математических выражений с именованными величинами и не требующая эмпирических данных[3], и второй — содержательная, подразумевающая, сравнение с эмпирическими данными. Сказанное в полной мере относится и к математическим моделям потребительского поведения, и к их отдельным математическим уравнениям и выражениям.

Если воспользоваться методологией формальной верификации, то нетрудно увидеть, что выражение (1) удовлетворяет ее требованиям. В частности, под оператором логарифмирования стоит безразмерная величина, а размерности левой и правой частей уравнения одинаковые, т. к. суммируются величины одной размерности (полезность (U) измеряется в тех же единицах, что и коэффициент удовлетворения k) [5].

Для проведения содержательной верификации необходимо использовать данные измерений. Если бы для величин, входящих в выражение (1) можно было бы найти их численные значения прямыми измерениями, то верификацию можно было бы провести прямой подстановкой их в уравнение полезности. Однако такая прямая верификация, оказывается невозможной, прежде всего, из-за отсутствия договоренностей

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований; проект №11-06-00319-а «Математические модели поведения агентов рыночных отношений».

[2] Это требование является одним из элементов метода, получившего название «размерный анализ» уравнений. Он непременно используется в физических и технических науках и подробно описан в литературе [8], [11].

[3] Это так называемый «размерный анализ» уравнений.

в отношении измерения полезности, коэффициентов удовлетворения и уровней нейтрального потребления. Однако несмотря на все это возможность проведения содержательной верификации сохраняется.

Сделать это можно следующим образом.

Если на основе уравнения (1) получить новые теоретические результаты и если они найдут эмпирическое подтверждение, то можно считать, что уравнение (1) верифицировано, хотя и косвенным методом. Ниже такая верификация проведена, но для случая потребления одного блага. Использованы эмпирические (статистические) данные относительно потребления множеством персон универсального блага — денег[1]. При этом полагается, что доход любого индивида потребляется полностью, рассматривая накопления как форму его потребления.

Первоначально полезность потребления некоторого блага рассмотрена как случайная величина на множестве персон. Получена теоретическая плотность распределения персон по полезности потребления некоторого блага. Затем, используя стандартную процедуру перехода от распределения по одной величине к распределению по другой, связанной с первой уравнением, перейдем от распределения персон по полезности к распределению персон по количеству потребления денег (по доходам), используя уравнение полезности (1). Проведем сравнение полученной указанным путем плотности распределения персон по доходам с эмпирическими данными органов статистики, а также с теоретическими результатами, полученными другими методами.

Полезность потребления блага как случайная величина на множестве персон. Плотность распределения

Потребление некоторого блага в количестве x единиц разными персонами вызывает у каждой из них субъективное ощущение удовлетворения. Для каждого индивида это ощущение (полезность) в количественном отношении будет разным. Формально это можно связать с тем, что уровень нейтрального потребления x_0 индивидуален, как и индивидуален коэффициент удовлетворения k.

Индивидуальность в оценке ощущений удовлетворения означает, что на множестве большого числа потребителей полезность потребления фиксированного количества некоторого блага представляет собой случайную величину. При достаточно большом числе потребителей очевидно, что ее можно считать непрерывной случайной величиной.

В таких случаях, как известно, вводят в рассмотрение соответствующую функцию распределения $\Psi(U)$ и функцию плотности распределения $\psi(U)$. Первую часто называют интегральной функцией распределения, а вторую — дифференциальной функцией распределения.

Функция плотности распределения (дифференциальная функция распределения) $\psi(U)$, как известно, представляет собой зависимость вероятности того, что случайная величина попадает в единичный интервал вблизи некоторого своего значения от численного значения этой величины.

Применительно к рассматриваемой ситуации это означает следующее. Вероятность того, что случайная величина (полезность U) попадает в единичный интервал вблизи некоторого ее значения U, равна доле потребителей от их полного числа, деленной на ширину этого интервала dU, т. е.:

$$\psi(U)=\left(\frac{dn}{N}\cdot\frac{1}{dU}\right). \qquad (2)$$

где dn — число потребителей, для которых полезность потребления некоторого количества блага имеет значение в интервале шириной dU от некоторого ее значения U до значения $(U + dU)$.

Распределения персон по полезности потребления блага — нормальное распределение Гаусса

Плотность распределения вероятностей попадания случайной величины в тот или иной интервал зависит от ее природы. В работе С. А. Айвазяна с соавторами [2] приведена сводная таблица различных законов распределения для случайных величин разной природы с указанием свойств этих распределений и схем (механизмов) формирования таких величин.

Если ориентироваться на эти механизмы (схемы), то можно считать, что случайная величина — полезность — распределена по нормальному (Гауссовому) закону.

[1] Мы называем деньги универсальным благом, поскольку они позволяют удовлетворять любую потребность, покупая соответствующие блага.

Действительно, как показано в работе С. А. Айвазяна, любая случайная величина y распределена по нормальному закону, если формирование этой величины происходит по следующей схеме:

1. Значение случайной величины *y* формируется под действием большого числа взаимно независимых случайных факторов.

2. Сила воздействия каждого отдельного *i*-го фактора мала и не может превалировать среди остальных.

3. Характер воздействия факторов — аддитивный, т. е. воздействие *i*-го фактора приводит к отклонению случайной величины от ее наиболее вероятного значения (а) на малую и равновероятную по знаку величину (Δ_i), т. е. $y_i = a \pm \Delta_i$.

Посмотрим, по какой схеме происходит формирование «численных» значений полезности *U* на множестве большого числа персон, потребляющих некоторое благо в количестве x единиц, и сопоставим ее со схемой формирования нормально распределенной случайной величины.

«Количество» случайной величины *U* оценивает сам потребитель. Факторы, которые влияют на его субъективную оценку, безусловно, многочисленны, и имеют разную природу (географическую, этническую, религиозную, медицинскую и др.), поэтому они взаимно независимы, что соответствует пункту 1, приведенной выше схемы.

Эти факторы обусловлены многими аспектами жизни индивида — его профессией, местом работы, состоянием здоровья, традициями семьи, климатическими условиями места проживания и т. д. и т. п. Говорить о превалирующей роли того или иного жизненного фактора для всех персон, по-видимому, нет оснований, если рассматривать все население земного шара и потребление конкретного блага. Отсутствие превалирующей роли того или иного фактора соответствует пункту 2, приведенной выше схемы.

Все потребители конкретного блага испытывают то или иное удовлетворение (полезность) от этого потребления, в том числе и отрицательные эмоции (отрицательная полезность). Индивидуальные особенности восприятия полезности приводят к большему или меньшему ее «численному» значению, причем, нет оснований отдавать предпочтение отклонению как в сторону больших, так и в сторону меньших значений, что соответствует пункту 3), приведенной выше схемы.

Таким образом, можно считать, что полезность U подчиняется нормальному распределению Гаусса, с плотностью распределения:

$$\psi(U) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(U-\mu)^2}{2\sigma^2} \right), \qquad (3)$$

в котором σ и μ — параметры распределения.

Следует отметить, что провести сравнение полученного распределения персон по полезности с эмпирическими данными не представляется возможным по причине принципиального отсутствия численных значений последних.

Однако если используя стандартные процедуры преобразования случайных непрерывных величин, перейти от распределения по одной случайной величине к распределению по другой, связанной с первой некоторой функциональной зависимостью, то может появиться возможность сопоставления с эмпирическими данными распределения этой другой случайной величины. Воспользуемся этой процедурой и перейдем от распределения персон по полезности потребления некоторого блага (3) к рассмотрению распределения персон по количеству потребленного этого блага, используя (1) и (3).

Распределения персон по количеству потребленного блага

Как известно, если задана плотность распределения некоторой случайной величины *x*, т. е. известна $\psi(x)$ и требуется найти плотность распределения зависящей от нее величины *y*, т. е. найти $\psi(y)$ при известной функциональной связи между ними, т. е. при наличии $y(x)$ или $x(y) = y^{-1}(x)$, то используют тождество [2, 10]:

$$\psi(x)dx = \psi(y)dy. \qquad (4)$$

Смысл этого тождества заключается в следующем. Плотность распределения $\psi(x)$, как и плотность распределения $\psi(y)$, представляет собой плотность вероятности обнаружения значения случайных величин *x* и, соответственно *y*, в единичном интервале соответствующих переменных вблизи их некоторых значений *x* и, соответственно, — *y*. Произведение же плотности вероятности на ширину интервала (как $\psi(x)dx$, так и $\psi(y)dy$) дает вероятность обнаружения численного значения величины в соответствующем интервале вблизи выбранного значения. Соотношение (4) отражает равенство вероятностей попадания взаимосвязанных между собой

величин x и y в связанные между собой интервалы dx и dy при замене одной на другую.

Применительно к переходу от распределения по полезности (U) к распределению по количеству потребленного блага (x), тождество (4) перепишется в виде:

$$\psi(U)dU = \psi(x)dx, \qquad (5)$$

из которого следует, что

$$\psi(x) = \psi(U)\frac{dU}{dx}. \qquad (6)$$

Из выражения (1) легко получить производную полезности по количеству блага[1]:

$$\frac{dU}{dx} = k\frac{1}{x} \qquad (7)$$

и подставив ее в выражение (6) с учетом уравнения (1) получим:

$$\psi(x) = \frac{k}{x\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{\left(k\ln\frac{x}{x_0}-\mu\right)^2}{2\sigma^2}\right). \qquad (8)$$

Если числитель и знаменатель предэкспоненциального множителя разделить на k, а в показателе экспоненты числитель и знаменатель разделить на k^2, и ввести новые обозначения $\frac{\sigma}{k} = s$, $\frac{\mu}{k} = \ln g$ и $x_0 g = m$, то выражение (8) примет канонический вид логнормального распределения с плотностью распределения:

$$\psi(x) = \frac{1}{xs\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{\left(\ln\frac{x}{m}\right)^2}{2s^2}\right), \qquad (9)$$

где: x — количество блага, а s и m — параметры распределения.

В отличие от выражения (3), теоретическое распределение персон по количеству потребленного блага (9), может быть проверено сравнением с эмпирическими данными. Для этого необходимо иметь статистические данные о распределении персон по количеству потребления того или иного блага. Однако найти такие сведения в доступной литературе не удалось. В приводимых статистических данных, касающихся потребления, содержатся усредненные по множеству персон данные. Исключение, весьма полезное для целей нашего исследования, составляют данные о доходах населения. Они представлены и в виде рядов распределений. Воспользуемся этими данными.

Распределение персон по доходам

Как известно, в отличие от обычных благ, непосредственно приносящих ощущение удовлетворения от их потребления (продукты питания, одежда, предметы роскоши и т. п.), деньги непосредственной полезности не имеют, если не считать того, что эти листочки бумаги могут быть использованы непосредственно с пользой разве что для разведения огня в камине. Деньги приносят ощущение полезности через те товары и услуги, которые на них могут быть приобретены.

Доход индивида зависит от многих обстоятельств. Их условно можно разделить на две категории. С одной стороны, это обстоятельства, связанные с внешними факторами, не зависящими от индивида. Среди них можно указать такие как наличие рабочих мест в месте проживания, их соответствие специальности и уровню квалификации индивида, наличие конкурентов и т. п. С другой стороны, это субъективное восприятие индивидом своего финансового состояния. Неудовлетворенность достигнутым уровнем доходов вызывает стремление увеличить доход и побуждает действовать в поисках большего заработка.

Если рассматривать полезность некоторой суммы денег M на множестве персон, то, очевидно, что она будет величиной случайной. Это связано с тем, что каждый потребитель по-своему распоряжается данной суммой, приобретая различные наборы благ, и через них оценивает уровень полезности денег. В этом отношении восприятие полезности денег не отличается от восприятия полезности любых других благ. Поэтому приведенные выше плотности распределения персон по полезности и по количеству потребленных благ могут быть использованы и для описания распределения персон по доходам.

Если в выражении (9) вместо количества блага x подставить доход M, то плотность распределения персон по доходам будет иметь вид:

[1] По существу это дифференциальное уравнение полезности, полученное в нашей работе [5], но записанное в другом виде.

$$\psi(M)=\frac{1}{sM\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{\left(\ln\frac{M}{m}\right)^2}{2s^2}\right), \qquad (10)$$

где s и m — параметры распределения, причем s — величина безразмерная ($\dim s = 0$), а m имеет размерность денежных единиц $\dim m$ = руб.[1].

Гипотеза о применимости логнормального распределения в качестве математической модели, отражающей распределение персон по доходам, была высказана С. А. Айвазяном [1] еще в 1970 г. Позже в [2] им было показано, что это обусловлено мультипликативным характером воздействия случайных факторов на размеры дохода. При этом прирост случайной величины (дохода) за счет действия случайных факторов пропорционален уже достигнутому уровню дохода, а коэффициент пропорциональности между приращением дохода и его достигнутым уровнем мал и равновероятен по знаку.

Концепция С. А. Айвазяна о мультипликативности воздействия факторов при формировании случайной величины «доход» и приращении случайной величины пропорционально достигнутому уровню согласуется с нашей концепцией восприятия приращения полезности и сопоставления ее с достигнутым уровнем. На ее основе и было введено дифференциальное уравнение кардиналистской полезности [5] и получено уравнение (1).

Действительно, если записать дифференциальное уравнение полезности денег[2], рассматривая их как благо, продифференцировав его, получим для приращения денег dM соотношение:

$$dM=\frac{dU}{k}M, \qquad (11)$$

т. е. приращение пропорционально достигнутому уровню доходов M, а коэффициент пропорциональности $\frac{dU}{k}$ представляет собой малую величину, которая может иметь любой знак. Это соответствует мультипликативному характеру воздействия случайных факторов и, как было сказано выше, приводит к формированию логнормального распределения.

[1] Строго говоря, следовало бы писать $\dim m$ = руб · мес$^{-1}$, т. к. размерность дохода $\dim[M]$ = руб · мес$^{-1}$. Однако обычно имеют ввиду некоторый интервал времени, который не указывают, что, строго говоря, неверно. Указанное в тексте сохраняет эту традицию. Не более.

[2] В уравнении (1) следует принять $N = 1$, $x \equiv M$.

Сравнение с эмпирическими данными

Сопоставление плотности логнормального распределения с эмпирическими данными, характеризующими распределение персон по доходам, было проведено в упомянутой выше работе С. А. Айвазяна. В ней использовались данные, касающиеся месячного душевого дохода 750 американских семей. В последующем эта модель неоднократно получала подтверждение, например, в работах [3], [6], [9], хотя и недостаточно строгое — в [4]. На представленных в этих работах графиках по оси ординат отложена безразмерная величина, в то время как плотность распределения персон по доходу имеет размерность, обратную размерности денежной единицы, т. е. (руб.$^{-1}$). Это видно из соотношения (10).

Проведем более строгое сравнение.

Эмпирические данные взяты из статистического сборника [7], в котором приведены интервальные ряды дохода (относительные частоты $\frac{\Delta n}{N}$ попадания дохода в соответствующие интервалы). По этим данным корректно можно построить только гистограмму, указав по оси ординат соответствующие частоты попадания (безразмерные величины!). Плотность же распределения — величина размерная. Размерность ее обратна размерности величины, по которой рассматривается распределение. В нашем случае $\dim[\psi M]$ = руб.$^{-1}$. Поэтому интервальные ряды подвергались предварительной обработке, обоснованной следующими соображениями.

Относительная частота попадания доходов $\frac{\Delta n}{N}$ в макроинтервал $M_1 \div M_2$ связана с плотностью распределения соотношением:

$$\frac{\Delta n}{N}=\int_{M_1}^{M_2}\psi(M)dM, \qquad (12)$$

в котором M_1 и M_2 значения доходов на границах интервала.

Если обе части этого уравнения разделить на разность $(M_2 - M_1)$, т. е. на ширину интервала, то получим:

$$\frac{1}{M_2-M_1}\frac{\Delta n}{N}=\frac{1}{M_2-M_1}\int_{M_1}^{M_2}\psi(M)dM. \qquad (13)$$

В правой части этого соотношения, в соответствии с теоремой о среднем, получаем среднее значение плотности распределения

$\langle\psi\rangle = \frac{1}{M_2 - M_1}\int_{M_1}^{M_2}\psi(M)\cdot dM$ в интервале доходов от М1 до М2. Это означает, что связь между средней плотностью распределения в пределах некоторого интервала и частотой попадания в интервал может быть представлена в виде:

$$\langle\psi\rangle = \frac{1}{M_2 - M_1}\frac{\Delta n}{N}. \qquad (14)$$

Если интересоваться зависимостью $\psi(M)$, то это среднее значение $\langle\psi\rangle$ можно приписать любому значению дохода M из этого интервала, включая его границы M_1 и M_2, и его середину. Выбор любого из этих вариантов одинаково необоснован. Переход от одного к другому приводит к сдвигу кривой плотности распределения по оси ординат. Эта неопределенность порождает погрешность в значениях тех параметров распределения, которые можно определить из эмпирической кривой, но не влияет на вид этой кривой. Будем приписывать $\langle\psi\rangle$ серединам интервалов, т. е.

$$\frac{1}{M_2 - M_1}\frac{\Delta n}{N} = \left\langle \psi\left(\frac{M_1 + M_2}{2}\right)\right\rangle. \qquad (15)$$

Данные интервальных рядов, обработанные указанным выше способом, наносились на поле графика. Кривая логнормального распределения строилась с помощью пакета Origin путем задания численных значений ее параметров и их подбора для совпадения кривой с эмпирическими данными (точками на рис.). Подобранные таким образом параметры распределения указаны на поле рисунка. Вопросы точности определения этих параметров выходят за пределы целей данной работы, и мы не будем на них останавливаться.

Один из результатов, полученный в к 1999 г. в России, представлен на рисунке.

Приведенный результат, как и упоминавшиеся результаты других авторов, показывает, что плотность распределения персон по доходам описывается логнормальным распределением (10). Если учесть, что в данной работе выражение (10) получено исходя из кардиналистского уравнения полезности (1) и совпадает с аналогичным выражением, полученным другим методом, а также подтверждается эмпирическими данными, то это уравнение можно считать верифицированным содержательно. Это делает его пригодным для использования в качестве математической модели при количественном описании восприятия удовлетворения при потреблении благ.

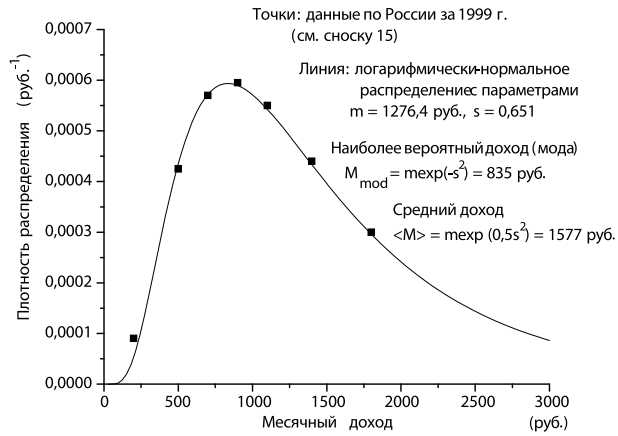


Рис. *Распределение персон по доходам*

Как и всякая математическая модель, уравнение полезности имеет определенную область применения. Определяется она, прежде всего, исходными посылками. В частности, при выводе дифференциального уравнения полезности рассматривался функциональный спрос, т. е. потребительский спрос, обусловленный качествами, присущими самому товару. При этом была рассмотрена ситуация, когда потребитель оценивает свои внутренние ощущения удовлетворения от потребления благ по количественным признакам. Другие же факторы, также влияющие на потребительскую оценку, учитываются коэффициентами удовлетворения.

В заключение приносим искреннюю благодарность профессору В. Р. Окорокову за внимание к данной работе и конструктивную критику в процессе ее выполнения.

Список источников

1. *Айвазян С. А.* Моделирование семейных доходов. // Экономика и математические методы. — М. : Наука, 1970. — Т. 6. — Вып. 2. — С. 288-296.

2. *Айвазян С. А., Енюков И. С., Мешалкин Л. Д.* Прикладная статистика. Основы моделирования и первичная обработка данных. — М. : Финансы и статистика, 1983. — 472 с.

3. *Деев Г.* Модель распределения населения по доходам. // Вопросы статистики. — 1995. — №2.

4. *Дмитриев А. Г., Козелецкая Т. А.* Об ошибках в представлении сведений о доходах населения // Экономика, экология и общество России в 21 столетии : труды 8-й Международной научно-практической конференции. — СПб. : Изд.-во Политехнического университета, 2006. — С. 499-501.

5. *Дмитриев А. Г., Козелецкая Т. А., Герман Е. А.* Теория потребительского спроса. Психофизическое

обоснование дифференциального уравнения кардиналистской полезности; интерпретация решения. // Журнал экономической теории. — 2011. — №1. — С. 111-117.

6. *Рабкина Н. Е., Римашевская Н. М.* Основы дифференциации заработной платы и доходов населения. — М.: Экономика, 1972. — 348 с.

7. Россия в цифрах 2001. — М.: Госкомстат, 2001. — 820 с.

8. *Сена Л. А.* Единицы физических величин и их размерности. М.: Наука, 1988. — 431 с.

9. *Суворов А. В.* Проблемы анализа дифференциации доходов и построения дифференцированного баланса денежных доходов и расходов населения. // Проблемы прогнозирования. — 2001. — №1. — С. 58-73.

10. *Худсон Д.* Статистика для физиков : пер. с англ. / Под ред. Е. М. Лейкина. — М.: Мир, 1970. — 296 с.

11. *Чертов А. Г.* Физические величины. Терминология, определения, обозначения, размерности, единицы. Справ. пособие. — М.: Высшая школа, 1990. — 335 с.

УДК 51.77, УДК 330.16

ключевые слова: поведенческие функции, экономическая социология, кардиналистская полезность, двухпараметрическая модель полезности, верификация математической модели, верификация уравнения полезности