УДК 330.115

Айзенберг Н.И., Мокрый И.В.

Индексы Дивизиа: моделирование и анализ[1]

Ключевые слова: статистические измерения, индексы, непрерывность во времени

В статье рассмотрены индексы в непрерывном времени – индексы Дивизиа. Проанализированы их свойства, возможные конечно-разностные аппроксимации. Построено несколько гипотез динамики цен и объемов в непрерывном времени для статистических данных за ряд периодов. Полученные траектории исследованы и на их основе, используя аппарат моделирования процессов в непрерывном времени, вычислены индексы Дивизиа. Проведено сравнение полученных результатов значений индексов Дивизиа между собой в зависимости от траекторий, а также с возможными их дискретными аппроксимациями.

Введение

Индексы цен являются важнейшим инструментом измерений в экономике. Они основаны на информации о динамике цен и количеств проданного товара за ряд периодов. Статистика имеет возможность получать эти измерения с определенным интервалом времени, например, раз в неделю, месяц и т.д. Поэтому показатели динамики оперируют данными в дискретном времени. Это известные и широко употребимые статистические индексы Ласпейреса, Пааше, Фишера, Эджворта, Уолша, Вартиа, среднегеометрического и др. Все методы расчета индексов в дискретном времени обладают рядом недостатков, которые искажают динамику экономического параметра каким-либо образом [15, 12].

Эта работа посвящена конструкциям индексов, предложенным в начале XX века французским ученым Ф.Дивизиа [3]. Они базируются на рассмотрении цен и объёмов покупок в виде непрерывных функций во времени. Существует мнение, что недостатки статистических методов, рассчитанных на основе дискретных данных о ценах и объёмах можно преодолеть, если перейти к непрерывной форме наблюдения за процессами. В настоящее время индексы Дивизиа переживают второе рождение. Многие ученые, обращаются в своих работах к этим индексам [3, 4], считая их некоторым теоретическим идеалом, к которому надо стремиться. Кроме того, эти индексы выглядят привлекательно для использования при моделировании и измерении экономических процессов в непрерывном времени.

С точки зрения практического применения конструкций Дивизиа существует ряд проблем. Этот индекс должен рассчитываться, как непрерывный во времени, а, следовательно, для использования его необходимо адаптировать к дискретным данным. Один из путей решения этой проблемы – поиск конечных аппроксимаций непрерывной формулы. Существует два подхода. Первый предлагает воспользоваться транзитивным представлением индекса Дивизиа и найти его дискретную аппрокси-

[1] Работа выполнена при поддержке РГНФ, проект № 09-0200278а

мацию [4, 11]. В другом – необходимо задаться траекторией изменения цен и потока объёмов товаров, в том числе, исходя из экономической логики. Например, путь, где будет соблюдаться постоянство вкладов долей стоимости в общей стоимости [7]. И тот и другой подход приводит к различным значениям индекса Дивизиа. Проблема выбора индекса смещается в плоскость выбора метода дискретной аппроксимации, определения необходимой точности приближения, или выбора траектории изменения цен и потока объёмов, адекватно описывающей действительную динамику параметров.

Сложности будут возникать не только на этапе выбора агрегированных непрерывных показателей, но и интерпретации используемых в построении моментных показателей цен и объёмов. Дело в том, что сбор экономических данных осуществляется не в непрерывном времени. Их сбор происходит в дискретном времени. Другими словами, даже, если исходить из того, что операции осуществляются в непрерывном времени, ни один потребитель не ведет непрерывного учета своих покупок; скорее, потребители учитывают суммарные покупки за конечные периоды времени. Подобная ситуация имеет место и в отношении производителей или продавцов товаров: фирмы суммируют свои продажи за дискретные периоды времени с целью отражения в бухгалтерском учете или для аналитических целей. Если пытаться аппроксимировать непрерывное время все более короткими дискретными интервалами времени, то можно ожидать, что эмпирические данные о ценах и количествах будут становиться все более неопределенными, поскольку потребители делают покупки (а производители или продавцы товаров осуществляют продажи) только в дискретные моменты времени. В результате принято [3, 5] в момент времени вместо показателей объёмов и стоимостей использовать поток объёмов и поток стоимостей товаров.

Задачу выбора в пространстве цен и объёмов товаров траектории изменения этих показателей необходимо рассматривать в тесной связи с теорией потребительских предпочтений. В работах [4, 16, 18] обсуждается взаимосвязь индексов Дивизиа с теорией функции полезности и основной задачей потребителя в микроэкономике. Доказано, что в случае однородных потребительских предпочтений будут однозначно определены траектории изменения цен и потоков объёмов, а следовательно и сами индексы в непрерывном времени. Кроме того, полученная формула индекса Дивизиа будет совпадать с аналитическим индексом, получаемым в результате сопоставления при разных ценах агрегатов стоимостей наборов товаров, обеспечивающих одинаковый уровень полезности для потребителя.

В этой работе мы проанализировали, основываясь на реальных данных, конечные аппроксимации индексов Дивизиа, а также рассмотрели несколько видов непрерывных траекторий цен и потока объемов товаров и нашли для них индексы Дивизиа. Для этого использовался аппарат, позволяющий моделировать процессы в непрерывном времени (DINAMO), что даёт возможность задаться не только траекториями, обладающими свойством однородности, для которых возможно в явном виде вычислить индекс Дивизиа, но и промоделировать неоднородные траектории динамики цен и потока объемов товаров. Например, с помощью функций многочленов, экспоненциальных, логарифмических и др. Учитывались условия на разрывность и неразрывность первых производных моделируемых функций. Экспериментально показано, что индексы Дивизиа не могут решить проблему выбора индекса расчёта. В случае их использования возникает задача выбора непрерывного пути изменения цен и объёмов, которая не менее сложна, чем задача выбора формулы расчёта.

1. Определение и свойства индекса Дивизиа

Рассмотрим пространство N товаров, которые продаются и покупаются в течение временного интервала $[\tau,T]$. В любой момент времени $t\in[\tau,T]$ вектор цен для товаров $1,..,N$ определится как $p^t=(p_1^t,..,p_N^t)$ и соответствующий ему вектор потока объёмов товаров $q^t=(q_1^t,..,q_N^t)$. Предположим, что все цены p_i^t и объёмы q_i^t, $i=\overline{1,n}$ являются реализациями непрерывных на отрезке $[\tau,T]$ функций цены и потока объёмов в момент t, и равны $p_i^t=p_i(t)$ и $q_i^t=q_i(t)$. Соответственно вектора p^t и q^t будут вектор-функциями $p^t=p(t)$ и $q^t=q(t)$. $p(t)\in R_{++}^N$ и $q(t)\in R_{++}^N$. Кроме того необходимо определить поток стоимости в момент t, как непрерывную на $[\tau,T]$ функцию от вектора цен и вектора потока объёмов товаров $v(t)=p(t)\cdot q(t)=\sum_{i=1}^{N}p_i(t)q_i(t)$. Значение i-ой компоненты будет равно $v_i(t)=p_i(t)q_i(t)$, $i=\overline{1,n}$. Удельный вес стоимости одного товара в общей будет равен доле $w_i(t)=v_i(t)/v(t)$, соответственно, сумма всех долей равна 1.

Логарифм изменения стоимости в периоде $t+1$ относительно периода t при $t,t+1\in[\tau,T]$ и $t<t+1$ можно представить в виде

$$\ln\left(\frac{p(t+1)\cdot q(t+1)}{p(t)\cdot q(t)}\right)=\ln(p(t+1)\cdot q(t+1))-\ln(p(t)\cdot q(t)) \qquad (1)$$

Что можно записать в виде определённого на интервале (τ,t) интеграла:

$$\ln(p(t+1)\cdot q(t+1))-\ln(p(t)\cdot q(t))=\int_t^{t+1}\frac{d\ln(p(s)\cdot q(s))}{ds}ds, \qquad (2)$$

где s - переменная дифференцирования, обозначающая момент времени. Подынтегральное выражение можно записать как

$$\begin{aligned}\frac{d\ln(p(s)\cdot q(s))}{ds}&=\sum_{i=1}^{N}\frac{p_i(s)dq_i(s)/ds}{p(s)\cdot q(s)}+\sum_{i=1}^{N}\frac{q_i(s)dp_i(s)/ds}{p(s)\cdot q(s)}=\\&=\sum_{i=1}^{N}w_i(s)\frac{d\ln p_i(s)}{ds}+\sum_{i=1}^{N}w_i(s)\frac{d\ln q_i(s)}{ds}\end{aligned} \qquad (3)$$

где $w_i(s)$ - значение удельной стоимости в общей стоимости для товара i в периоде s, $i=\overline{1,n}$. Тогда индексы Дивизиа для цен и объёмов [11, 12] определены так.

$$I_{pD}(t,t+1)=\exp\int_t^{t+1}\sum_{i=1}^{N}w_i(s)\frac{d\ln p_i(s)}{ds}ds \qquad (4)$$

$$I_{qD}(t,t+1)=\exp\int_t^{t+1}\sum_{i=1}^{N}w_i(s)\frac{d\ln q_i(s)}{ds}ds \qquad (5)$$

Если не выделять весовой коэффициент, то индекс Дивизиа можно представить так

$$\ln I_{pD}(t,t+1)=\int_t^{t+1}\frac{\sum_i q_i(s)dp_i(s)/ds}{\sum_i q_i(s)p_i(s)}ds, \qquad (6)$$

$$\ln I_{qD}(t,t+1)=\int_{t}^{t+1}\frac{\sum_{i} p_i(s)dq_i(s)/ds}{\sum_{i} p_i(s)q_i(s)}ds. \qquad (7)$$

1.1. Свойства индексов

Рассмотрим следующие свойства и определим выполняют ли их индексы Дивизиа.

1) Транзитивности. Произведение индексов за ряд периодов будет равно индексу за общий период измерения. Для индексов Дивизиа свойство выполняется в силу построения.

$$. I_{pD}(\tau,T)=\prod_{t=\tau}^{T-1} I_{pD}(t,t+1). \qquad (8)$$

2) Обратимости во времени. Индекс, вычисленный от периода τ к периоду t, будет равен единице делённой на обратный индекс – от периода t к периоду τ.

3) Мультипликативности. Произведение индекса цен Дивизиа на индекс объёмов даёт в результате индекс стоимости. Это тоже справедливо по построению.

$$I_v(t,t+1)=I_{pD}(t,t+1)\cdot I_{qD}(t,t+1)$$

4) О среднем значении. Если рассматривать индекс Дивизиа только в момент времени t, то получим, что его значение по построению будет находиться между максимальным и минимальным темпом роста на отдельные товары. Важным является то, что свойство среднего, как только мы переходим к вычислению индексов (4) и (5) для всего интервала времени $[t,t+1]$ теряется. Так, для индекса (4) воспользуемся свойством о среднем для интеграла и запишем:

$$\ln I_{pD}=\sum_{i=1}^{N} w_i(t_i^*)\ln(p_i(t+1)/p_i(t)),$$

где $t_i^*\in[\tau,t]$, причём сумма $w_i(t_i^*)$ может быть не равна 1, так как моменты $t_i^*\neq t_j^*$ при $i\neq j$, а следовательно веса могут быть подсчитаны в разные моменты времени.

5) Согласованности при агрегировании. При разбиении всего пространства товаров на группы общий индекс возможно рассчитывать с помощью того же метода, что и индексы в отдельных группах, при этом вместо темпов роста на товары будут использоваться индексы по группам разбиения. Пусть всё пространство товаров разобьем на K групп A_k, в каждой из которых по N_k товаров. Пусть $p_k(s), q_k(s)$ субвектора $p(s), q(s)$, определяющие цены и объёмы для k-ой группы. Тогда по формуле (4) индекс Дивизиа для группы k запишется

$$\ln I_{p_kD}(t,t+1)=\int_{\tau}^{t}\sum_{i\in A_k}\frac{p_i(s)q_i(s)}{p_k(s)\cdot q_k(s)}\frac{d\ln p_i(s)}{ds}ds.$$

Рассчитывая общий индекс, с использованием индексов Дивизиа, рассчитанных по группам:

$$\ln I_{pD}(t,t+1)=\int_{t}^{t+1}\sum_{k=1}^{K}\frac{p_k(s)q_k(s)}{p(s)\cdot q(s)}\sum_{i\in A_k}\frac{p_i(s)q_i(s)}{p_k(s)\cdot q_k(s)}\frac{d\ln p_i(s)}{ds}ds, \qquad (9)$$

тогда общий индекс Дивизиа будет иметь обычную структуру, где темпы роста товаров заменяют темпы роста товарных групп, а весовые коэффициенты – это весовые коэффициенты соответствующих групп:

$$\ln I_{pD}(t,t+1)=\int_{t}^{t+1}\sum_{k}^{K}\frac{p_k(s)q_k(s)}{p(s)\cdot q(s)}\frac{d\ln I_{p_kD}(s,t)}{ds}ds\,.$$

Таким образом, можно сказать, что индекс Дивизиа выполняет свойство согласованности при агрегировании. Для практического использования это свойство является очень важным. Статистика оперирует тысячами наименований товаров. Для компактного представления информации о динамике цен необходимо первоначальное агрегирование данных. Речь идёт об объёдинении товаров, обладающих похожими потребительскими характеристиками в единые группы. Например, товар «молоко», описывающий в совокупности динамику цен на все виды молока, торгуемого на рынке, в том числе молока разной жирности, от разных поставщиков, продаваемого на разных площадках и др. Корректное агрегирование будет предполагать использование единого метода расчёта индекса цен на всех уровнях.

2. Аппроксимации индекса Дивизиа

2.1. Аппроксимация методами численного интегрирования

Рассмотрим два способа аппроксимации индекса Дивизиа. В первом применяются принципы численного интегрирования, где определяется приблизительное значение интеграла с помощью известных методов, например, прямоугольников, трапеций, метода Симпсона и др. С их помощью оценивается значение интеграла и возможная погрешность. Отрезок интегрирования $[\tau,T]$ разбивается на M частей равной длины, предполагается, что в каждый момент времени $k=\tau,\tau+1,...,t,t+2,...,T$ известны значения цен и объёмов. Интеграл аппроксимируется на каждом шаге по времени. Все формулы, получаемые в результате можно характеризовать по скорости сходимости к искомому индексу Дивизиа с помощью величины остаточного члена или погрешности.

Надо заметить, что очень многие известные формулы расчёта индексов цен можно представить в виде аппроксимаций индекса Дивизиа, в зависимости от выбранной разностной схемы интегрирования. Обсудим некоторые из них.

1. Разностные аппроксимации индексов Дивизиа индексами Ласпейреса I_{pL}.

Пусть $q_i(k)=q_i^t$, $\Delta p_i(k)=p_i^{t+1}-p_i^t$, тогда используя (6), получим

$$\ln I_{pD}(t,t+1)\approx\int_{t}^{t+1}\frac{\sum_i q_i^t dp_i(k)/dk}{\sum_i q_i^t p_i(k)}dk\,,$$

$$\int_{t}^{t+1}\frac{\sum_i q_i^t dp_i(k)/dk}{\sum_i q_i^t p_i(k)}dk=\frac{\sum_i q_i^t p_i^{t+1}}{\sum_i q_i^t p_i^t}\equiv I_{pL}^{t,t+1}\,, \qquad (10)$$

$$I_{pD}(\tau,T)\approx\prod_{t=\tau}^{T-1}I_{pL}^{t,t+1}\,.$$

Таким образом, аппроксимацией индекса Дивизиа является индекс Ласпейреса, рассчитанный цепным способом за весь период. Формула Ласпейреса дает низкую точность оценки, и считается аппроксимацией первого порядка.

2. Аппроксимация в виде индекса Пааше I_{pP}. Пусть $q_i(k) = q_i^{t+1}$, $\Delta p_i(k) = p_i^{t+1} - p_i^t$, тогда

$$\ln I_{pD}(t,t+1) \approx \ln \frac{\sum_i q_i^{t+1} p_i^{t+1}}{\sum_i q_i^{t+1} p_i^t} \equiv \ln I_{pP}^{t,t+1}, \qquad (11)$$

$$I_{pD}(\tau,T) \approx \prod_{t=\tau}^{T-1} I_{pP}^{t,t+1}.$$

Индекс Пааше имеет такую же скорость сходимости как индекс Ласпейреса.

3. Аппроксимация индекса Дивизиа индексом Фишера I_{pF}. Индекс Фишера представляет собою среднее геометрическое из индексов Ласпейреса и Пааше, которые, как было показано выше, сами являются аппроксимациями для формулы Дивизиа.

$$\ln I_{pD}(t,t+1) \approx \frac{1}{2}\left(\ln \frac{\sum_i q_i^t p_i^{t+1}}{\sum_i q_i^t p_i^t} + \ln \frac{\sum_i q_i^{t+1} p_i^{t+1}}{\sum_i q_i^{t+1} p_i^t} \right) \equiv \ln I_{pF}^{t,t+1}, \quad (12)$$

$$I_{pD}(\tau,T) \approx \prod_{t=\tau}^{T-1} I_{pF}^{t,t+1}.$$

В отличие от индексов Ласпейреса и Пааше, индекс Фишера относится к аппроксимации второго порядка: погрешность будет в два раза меньше, чем для формул (10) и (11). Сама формула считается привлекательной по нескольким причинам. Для нее выполняется ряд свойств, которые не выполняют. Индексы Ласпейреса и Пааше, в частности метод Фишера мультипликативен, выполняет требование обратимости во времени. Кроме того, надо заметить, что индекс Фишера нивелирует известное свойство пары индексов Ласпейреса и Пааше, состоящее в том, что один из них обычно завышает рост цен, тогда как второй на том же шаге по времени его занижает.

4. Индекс Эджворта I_{pE} аппроксимирует индекс непрерывного времени Дивизиа.

Пусть $q_i(k) \approx \left(q_i^t + q_i^{t+1}\right)/2$, тогда при $\Delta p_i(k) = p_i^{t+1} - p_i^t$ получим

$$\ln I_{pD}(t,t+1) \approx \ln \frac{\sum_i \left(q_i^t + q_i^{t+1}\right) p_i^{t+1}}{\sum_i \left(q_i^t + q_i^{t+1}\right) q_i^t} \equiv \ln I_{pE}^{t,t+1}. \qquad (13)$$

5. Аппроксимация индексом Уолша I $I_{pW(I)}$.

Пусть $q_i(k) \approx \left(q_i^t \cdot q_i^{t+1}\right)^{0,5}$, тогда при $\Delta p_i(k) = p_i^{t+1} - p_i^t$ получим

$$\ln I_{pD}(t,t+1) \approx \ln \frac{\sum_i \left(q_i^t \cdot q_i^{t+1}\right)^{0,5} p_i^{t+1}}{\sum_i \left(q_i^t \cdot q_i^{t+1}\right)^{0,5} p_i^t} \equiv \ln I_{pW(I)}^{t,t+1}. \qquad (14)$$

Аппроксимации формулами Эджворта и Уолша относятся также ко второму порядку. Поэтому эти индексы быстрее сходятся к индексу Дивизиа, чем индексы

Лайпейреса и Пааше. Привлекательность индексов состоит в использовании для взвешивания объёмов двух сравниваемых периодов, тем самым, можно сказать учитывается потребительский выбор в сравниваемые временные промежутки. Кроме того, для них выполняется важное требование обратимости во времени.

6. Индексы непрерывного времени Дивизиа (4) аппроксимируются среднегеометрическим индексом $I_{pG}^{t,t+1}$. При $\Delta \ln p_i(k) = \ln p_i^{t+1} - \ln p_i^t$ получим

$$\ln I_{pD}(t,t+1) \approx \ln \sum_i \omega_i(k)\left(\ln p_i^{t+1} - \ln p_i^t\right),$$

$$\ln \sum_i \omega_i(k)\left(\ln p_i^{t+1} - \ln p_i^t\right) = \ln I_{pG}^{t,t+1} \qquad (15)$$

В зависимости от выбора весов $\omega_i(t)$ получаем различные аппроксимации.

а) Среднегеометрический индекс с весовыми коэффициентами по базисному году

$$\omega_i(k) = \frac{p_i^t q_i^t}{\sum_i p_i^t p_i^t} = \omega_i^{tt},$$

$$I_{pD}(\tau,T) \approx \prod_{t=\tau}^{T-1} I_{pG}^{tt+1}\left(\omega^{tt}\right). \qquad (16)$$

б) Среднегеометрический индекс с весовыми коэффициентами по текущему году.

$$\omega_i(k) = \frac{p_i^{t+1} q_i^{t+1}}{\sum_i p_i^{t+1} q_i^{t+1}} = \omega_i^{t+1,t+1},$$

$$I_{pD}(\tau,T) \approx \prod_{t=\tau}^{T-1} I_{pG}^{tt+1}\left(\omega^{t+1,t+1}\right). \qquad (17)$$

При разностной аппроксимации весовых коэффициентов используется информация о потоке изменения удельной стоимости в общей. Формулы (16) и (17) представляют методы первого порядка, т.е. достаточно низкую точность аппроксимации индекса Дивизиа. Это связано с тем, что весовые коэффициенты дают искажённую информацию либо с запаздыванием (случай а)), либо с опережением (случай б)). Методы, использующие для формирования весовых коэффициентов различные усреднения удельных стоимостей в рассматриваемые периоды, имеют обычно лучшие характеристики.

в) Индекс Торнквиста I_{pT}. Здесь в качестве весовых коэффициентов берется простое среднее арифметическое удельных стоимостей в периоде t и $t+1$, т.е. значение удельной стоимости товара, находящееся посредине временного интервала $[t,t+1]$, если траектория изменения прямая линия.

$$\omega_i(k) = \left(\omega_i^{t+1,t+1} + \omega_i^{tt}\right)/2,$$

$$I_{pD}(\tau,T) \approx \prod_{t=\tau}^{T-1} I_{pG}^{tt+1}\left(\left(\omega_i^{t+1,t+1} + \omega_i^{tt}\right)/2\right) \equiv I_{pT}^{\tau T}. \qquad (18)$$

В 1981 году Trivedy доказал, что эта формула будет наилучшей аппроксимацией, если воспользоваться методом трапеций. Среди экономистов также принято считать метод (18) лучшим [3], хотя на деле свойства этой формулы не превосходят

свойств индексов Фишера, Уолша I, а также Тейла, Вартиа, Уолша II, переход к которым показан ниже. Это метод второго порядка. В качестве преимущества можно выделить то, что метод легко интерпретируем, а используемые характеристики удельных стоимостей, характеризующих потребительские расходы, соответствуют в первом приближении как раз середине шага по времени.

г) Индекс Тейла I_{pTl} использует кубическое усреднение удельных стоимостей.

$$\omega_i(k) = \left(\omega_i^{tt} \cdot \omega_i^{t+1,t+1} \left(\omega_i^{t+1,t+1} + \omega_i^{tt}\right)/2\right)^{1/3} = \omega_{iTl}^{t,t+1},$$

$$I_{pD}(\tau,T) \approx \prod_{t=\tau}^{T} I_{pG}^{tt+1}\left(\omega_{iTl}^{t,t+1}\right) \equiv I_{pTl}^{\tau T}. \qquad (19)$$

д) Индекс Уолша II $I_{pW(II)}$ использует среднегеометрическое удельных стоимостей при вычислении весовых коэффициентов.

$$\omega_i(t) = \left(\omega_i^{tt} \cdot \omega_i^{t+1,t+1}\right)^{1/2},$$

$$I_{pD}(\tau,T) \approx \prod_{t=\tau}^{T-1} I_{pG}^{tt+1}\left(\left(\omega_i^{tt} \cdot \omega_i^{t+1,t+1}\right)^{1/2}\right) \equiv I_{pW(II)}^{\tau T}. \qquad (20)$$

е) Индекс Монтгомери-Вартиа I_{pV} использует для весовых коэффициентов среднее логарифмическое.

$$\omega_{iV}^{t,t+1} = \frac{L\left(p_i^t q_i^t, p_i^{t+1} q_i^{t+1}\right)}{\sum_i L\left(p_i^t q_i^t, p_i^{t+1} q_i^{t+1}\right)}, \text{ где } L(a,b) = \frac{a-b}{\ln a - \ln b},$$

$$I_{pD}(\tau,T) \approx \prod_{t=\tau}^{T-1} I_{pG}^{tt+1}\left(\omega_{iV}^{t,t+1}\right) \equiv I_{pV}^{\tau T}. \qquad (21)$$

Применяя другие разностные схемы, список возможных аппроксимаций непрерывных индексов Дивизиа можно продолжать. Важно отметить, что, при таком такой подходе полученные приближения могут быть достаточно грубыми, но не алогичными. Следующий подход при неграмотном его применении может дать и бессмысленный результат.

2.2. Аппроксимация, использующая траектории изменения цен, объёмов и стоимостей товаров

Второй вид аппроксимации индекса Дивизиа. Идея подхода состоит в том, что необходимо задаться гладкой траекторией изменения цены, потока объёма или стоимости, при этом, используя некоторую функциональную зависимость от момента времени. Предполагается, что известны значения только в точках начала и конца периода $[\tau,T]$, это будут пары цены-объёмы (p^τ, q^τ) и (p^t, q^t). Траектория C описывает динамику непрерывных на $[\tau,T]$ функций цены $p(s)$ и потока объёма $q(s)$, где s – момент времени, который меняется от τ до T. Тогда индекс Дивизиа можно записать

$$\ln I_{pD}(C) = \int_C \frac{\sum_i q_i(s)\, dp_i(s)/ds}{q(s)\, p(s)} ds \qquad (22)$$

и индекс объёмов

$$\ln I_{qD}(C)=\int_C \frac{\sum_i p_i(s)dq_i(s)/ds}{q(s)\,p(s)}ds \qquad (23)$$

В теории индексов рассматривались разные траектории. Перечислим некоторые из них.

Траектория, которую предложил Фогт. Линейное изменение векторов цен и потоков объёмов в $R^n_{++}\times R^n_{++}$:

$$\begin{cases} p_i(k)=p_i^\tau+\left(p_i^T-p_i^\tau\right)\cdot s \\ q_i(k)=q_i^\tau+\left(q_i^T-q_i^\tau\right)\cdot s \end{cases}, \quad s\in[0,1],\ \ i=\overline{1,n} \qquad (24)$$

В этом случае можно получить в явной форме интеграл для вычисления индекса Дивизиа. Но он имеет достаточно сложную форму [19].

В 1937 году Монтгомери получил результат аппроксимации индекса Дивизиа при использовании логарифмической зависимости роста цены и потока объёмов

$$\begin{cases} \ln p_i(k)=\ln p_i^\tau+\left(\ln p_i^T-\ln p_i^\tau\right)\cdot s \\ \ln q_i(k)=\ln q_i^\tau+\left(\ln q_i^T-\ln q_i^\tau\right)\cdot s \end{cases}, \quad s\in[0,1],\ \ i=\overline{1,n} \qquad (25)$$

В этом случае несложно показать, что одной из разностных аппроксимаций индекса Дивизиа будет формула известная, как индекс Монтгомери-Вартиа (21). Это среднегеометрический индекс, использующий в качестве весов среднее логарифмическое стоимостей базисного и текущего периодов. В явной форме результат получить не удаётся. Для этого необходимо оценить интеграл

$$\ln I_{pD}(C)=\int_0^1 \frac{\sum_i p_i^\tau q_i^\tau\left(p_i^T q_i^T/p_i^\tau q_i^\tau\right)^s \ln\left(p_i^T/p_i^\tau\right)}{\sum_i p_i^\tau q_i^\tau\left(p_i^T q_i^T/p_i^\tau q_i^\tau\right)^s}ds$$

Формула была получена только для $N=2$ [19]. В работах, посвященных подобным траекториям, обычно обсуждаются аппроксимации, которые хорошо оценивают эту формулу. Например, такие как (18)-(20).

Кроме траекторий, рассматривающих изменение цен и потоков объёмов по отдельности, возможно формирование траекторий, учитывающих протекающий во времени процесс их совместных изменений. В данном случае необходимы гипотезы, определяющие взаимовлияние цен на объёмы потребления. Задачи в такой постановке приводят к использованию экономического подхода исследования индексов цен [6, 11]. Он предполагает, что в каждом временном периоде потребитель решает задачу максимизации функции полезности, определяя тем самым объёмы потребления при экзогенно заданных ценах на товары. Зависимости между ценами и объёмами, а, следовательно, и выбором метода расчёта индексов изменения цен и объёмов, определяются формой выбранной функции полезности. Индексы рассчитываются, как отношение стоимостей, затраченных на покупку набора товара, обеспечивающего один уровень удовлетворения полезности в ценах текущего и базисного периодов. В рамках этого направления доказаны теоремы о том, что однозначное представление индекса цен возможно только в случае, если функция полезности будет однородной первой степени. [5, 6, 13, 16]

Необходимо отметить, что индексы Дивизиа, рассмотренные при условии однородности функции полезности, приобретают свойство независимости от траектории изменения цен и объёмов и становятся однозначно определяемыми. Кроме того, они будут совпадать с индексом, полученным аналитическим способом. Для примера можно рассмотреть траектории имплицированные следующей зависимостью цен и объёмов

$$q_i(t) = \alpha_i p_i(t)^{\sigma}, \qquad i = \overline{1,n} \tag{26}$$

где $t \in [\tau, T]$, $p(t)$ – функции изменения цен, α_i – положительные коэффициенты. Если $\sigma \neq 1$, то получим для индекса Дивизиа в периоде T относительно периода τ следующее выражение

$$\ln I_{pD}(\tau, T) = \int_{\tau}^{T} \frac{d \ln\left(\sum_{i=1}^{N} \alpha_i p_i(t)^{1-\sigma} \right)^{1/(1-\sigma)}}{dt} dt,$$

$$\ln I_{pD}(\tau, T) = \ln \left(\frac{\sum_{i=1}^{N} \alpha_i p_i(T)^{1-\sigma}}{\sum_{i=1}^{N} \alpha_i p_i(\tau)^{1-\sigma}} \right)^{1/(1-\sigma)}. \tag{27}$$

При $\sigma = 1$ формула (27) представляется в виде средней геометрической. Используя зависимость (26) цен от объёмов, можно получить в явном виде значение интеграла (индекса Дивизиа), который описывает целый класс индексов в зависимости от выбранного коэффициента эластичности зависимости цен от объёмов σ. При различных σ он может совпадать с индексами Ласпейреса, Пааше, Фишера, Эджворта, Вартиа и др [5, 12].

Необходимо сказать о главном недостатке траекторного направления. В общем случае, где можно предположить любой вид динамики цены и потока объёмов между измерениями, возможны траектории с плохими характеристиками, например, имеющие петли, или существенные изгибы, пересечения. Поэтому для выбора траекторий, на основе которых возможно непротиворечивое вычисление индекса Дивизиа, была предложена система аксиом (свойств), которым должно удовлетворять выбранное «семейство путей», например [17]. Одну из систем аксиом предложил Ершов в [8]. В неё входят аксиомы о транзитивности, обратимости во времени, обратимости факторов (симметричности), эквивалентности линейных траекторий стоимости. В систему аксиом включена также аксиома о единственности пути. Наличие именно этой аксиомы систему М. Рихтера [17] делало противоречивой. Выполнение её возможно только при условиях значительно сужающих класс функций, которые можно выбрать в качестве траекторий для динамики цен и потока объёмов [16]. В работе Ершова Э.Б. таким условием является аксиома об эквивалентности линейных параметризаций траекторий стоимости.

3. Имитационное моделирование траекторий изменения цен и потоков объёмов

3.1. Выбор траекторий изменения цен и потоков объёмов

1. Точки p_i^t и p_i^{t+1}, q_i^t и q_i^{t+1}, значения цен и объемов в периоде t и периоде $t+1$, соединены прямой – прямая траектория.

$$\begin{cases} p_i(k) = p_i^t + \left(p_i^{t+1} - p_i^t\right)\cdot k \\ q_i(k) = q_i^t + \left(q_i^{t+1} - q_i^t\right)\cdot k \end{cases}, \quad k \in [t, t+1], \quad t \in [\tau, T]. \qquad (28)$$

2. Точки p_i^t и p_i^{t+1}, q_i^t и q_i^{t+1} соединяются с помощью экспоненты, т.е. темпы роста на всем периоде одинаковы, - экспоненциальная траектория.

$$\begin{cases} p_i(k) = p_i^t \cdot \left(p_i^{t+1} / p_i^t\right)^k \\ q_i(k) = q_i^t \cdot \left(q_i^{t+1} / q_i^t\right)^k \end{cases}, \quad k \in [t, t+1], \quad t \in [\tau, T]. \qquad (29)$$

3. Для линейной и экспоненциальной траектории рассчитывались также варианты сглаженных кривых в точках наблюдения данных с помощью сплайнов. Для этого использовался элемент запаздывания. Точки p_i^t и p_i^{t+1} соединяются с помощью степенного многочлена $ak^3 + bk^2 + ck + d$, для которого

$$\begin{cases} ak^3 + bk^2 + ck + d = p_i^t \\ a(k+1)^3 + b(k+1)^2 + c(k+1) + d = p_i^{t+1} \\ 3ak^2 + 2bk + c = \dfrac{p_i^{t+1} - p_i^{t-1}}{2} \\ 3a(k+1)^2 + 2b(k+1) + c = \dfrac{p_i^{t+2} - p_i^t}{2} \end{cases}, \quad k \in [t, t+1], \quad t \in [\tau+1, T]. \quad (30)$$

Такой ввод коэффициентов *a, b, c, d* обеспечивает плавное прохождение через узловые точки, где данные о ценах и объемах известны. Аналогично строятся траектории динамики объемов продаж.

4. Степенные траектории соединения p_i^t и p_i^{t+1}, q_i^t и q_i^{t+1}, которые в общем виде можно представить как

$$\begin{cases} p_i(k) = \left\{\left(p_i^t\right)^\delta + \left(\left(p_i^{t+1}\right)^\delta - \left(p_i^t\right)^\delta\right)\cdot k\right\}^{1/\delta} \\ q_i(k) = \left\{\left(q_i^t\right)^\delta + \left(\left(q_i^{t+1}\right)^\delta - \left(q_i^t\right)^\delta\right)\cdot k\right\}^{1/\delta} \end{cases}, \quad k \in [t, t+1], \quad t \in [\tau, T]. \qquad (31)$$

где $\delta = 2,3,4,\ldots$. Или другой вариант $\delta = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$

5. Предположим, что в стоимости возможно определить долю фактора цены и объёма. Следующая траектория построена таким образом, чтобы при изменении стоимости от периода наблюдения t до периода наблюдения $t+1$ эти доли были постоянными. Траекторию такого вида предложил Ершов Э.Б.. В [7] доказано, что при их использовании можно получить интеграл в явном виде, равный индексу Монтгомери-Вартиа. В этом случае предполагается такая параметризация пути, что

$$p(t+1)\cdot q(t+1) = p(t)q(t) + \left(p(t+1)\cdot q(t+1) - p(t)q(t)\right)\cdot k,\ k \in [t, t+1] \quad t \in [\tau, T].$$

Тогда формулы траектории пути для цены и потока объёма определятся несколькими способами.

$$\begin{cases} p_i(k) = \left\{ \left(p_i^t q_i^t + \left(p_i^{t+1} q_i^{t+1} - p_i^t q_i^t \right) \cdot k \right) \cdot \left(p_i^t / q_i^t \right) \cdot \left(\left(p_i^{t+1} / p_i^t \right) / \left(q_i^{t+1} / q_i^t \right) \right)^k \right\}^{0,5} \\ q_i(k) = \left\{ \left(p_i^t q_i^t + \left(p_i^{t+1} q_i^{t+1} - p_i^t q_i^t \right) \cdot k \right) \cdot \left(q_i^t / p_i^t \right) \cdot \left(\left(q_i^{t+1} / q_i^t \right) / \left(p_i^{t+1} / p_i^t \right) \right)^k \right\}^{0,5} \end{cases}, \quad (32)$$

где $k \in [t, t+1]$, $t \in [\tau, T]$. Далее эта траектория будет называться траектория Ершова I.

Эта траектория изменения цен и объёмов будет соответствовать квадратичной функции полезности, если рассматривать основную задачу потребителя [12, 13]. При такой постановке индекс цен будет совпадать с индексом Фишера.

Ершов предложил [8], исходя из условия линейного изменения стоимости от периода τ к периоду t, траекторию следующего вида (Ершова II).

$$\begin{cases} p_i(k) = p_i^t \left[p_i^t q_i^t + \dfrac{\left(p_i^{t+1} q_i^{t+1} - p_i^t q_i^t \right)}{p_i^t q_i^t} k \right]^{\alpha_i(p)} \\ q_i(k) = q_i^t \left[p_i^t q_i^t + \dfrac{\left(p_i^{t+1} q_i^{t+1} - p_i^t q_i^t \right)}{p_i^t q_i^t} k \right]^{\alpha_i(q)} \end{cases}, \quad k \in [t, t+1], \quad t \in [\tau, T] \quad , \quad (33)$$

где $\alpha_i(p) + \alpha_i(q) = 1$ и

$$\alpha_i(P) = \ln\left(p_i^{t+1} / p_i^t \right) / \ln\left[\left(p_i^{t+1} q_i^{t+1} \right) / \left(p_i^t q_i^t \right) \right], \ \alpha_i(Q) = \ln\left(q_i^{t+1} / q_i^t \right) / \ln\left[\left(p_i^{t+1} q_i^{t+1} \right) / \left(p_i^t q_i^t \right) \right].$$

3.2. Результаты моделирования

Исходными данными послужила статистика цен и объемов продаж розничной торговли продуктов питания в России за 1992–2000 года [9], [10]. Эксперимент состоял из двух частей. На основе начальных данных по формулам (10)-(21) рассчитывались индексы, являющиеся конечно-разностными аппроксимациями индекса Дивизиа [1]. Значения некоторых индексов приведены в табл. 1. Полученные расхождения достаточно серьезны, на практике ими сложно пренебрегать. Это демонстрирует тот факт, что разрешение проблемы выбора метода расчета индекса через поиск той или иной аппроксимации непрерывного индекса Дивизиа невозможен.

Табл. 1. Значения индексов цен для продуктов питания, аппроксимирующих непрерывный индекс Дивизиа, рассчитанных цепным способом.

годы	Ласпейреса	Пааше	Фишера	Вартиа	Торнквиста
1992	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
1993	8,82	8,64	8,73	8,74	8,73
1994	25,55	24,52	25,03	25,04	25,05
1995	52,92	50,72	51,81	51,75	51,84
1996	58,76	56,03	57,38	57,29	57,38
1997	64,69	61,88	63,27	63,17	63,27
1998	135,23	128,24	131,69	131,47	131,76
1999	166,39	156,00	161,11	160,88	161,20
2000	196,96	183,30	190,00	189,77	190,13
2001	239,49	222,95	231,08	230,80	231,20

Очень важной частью стало моделирование непрерывных траекторий. Стоит отметить, что исследования проводились с помощью очень удобного инструментария, позволяющего представлять непрерывную динамику и использовать полученные

функции для вычисления интегралов в индексах Дивизиа. Имитировалась динамика между точками на концах периодов времени, в которых известны значения цен и объёмов. Исследуемые траектории приведены выше в формулах (28)-(33). Это линейная; экспоненциальная; траектория, описанная через многочлены; а также траектории, описывающие зависимости не только цены от времени и потока объёма от времени, но и различные закономерности изменения потока стоимости во времени. Выбор именно этих зависимостей продиктован предшествующей историей развития индексного анализа. Результаты расчетов приведены в табл. 2 – 4.

Табл. 2. Значения непрерывного индекса Дивизиа цен, рассчитанного по различным траекториям изменения цен и объемов.

Период	**Линейная траектория** (28)	**Линейная сглаженная** (30)	**Экспоненциальная траектория** (29)	**Траектории, рассчитанные по** (31)		**Траектории Ершова I** (32)	**Траектории Ершова II** (33)
				$k=6$	$k=1/6$		
1992	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
1993	8,80	8,80	8,75	8,47	8,753	8,47	8,41
1994	25,31	25,35	25,08	24,43	25,11	24,28	24,05
1995	52,39	52,52	51,91	50,57	51,98	50,65	50,14
1996	58,03	58,19	57,47	56,06	57,55	56,11	55,54
1997	63,98	64,16	63,37	61,81	63,46	62,39	61,76
1998	133,30	133,70	131,90	128,90	132,1	129,7	128,00
1999	163,20	163,60	161,40	157,90	161,7	158,6	156,50
2000	192,50	193,00	190,40	186,20	190,7	187,3	184,70
2001	234,10	234,70	231,60	226,50	231,9	227,7	224,50

Табл. 3. Значения непрерывного индекса Дивизиа объема, рассчитанного по различным траекториям изменения цен и объемов.

Период	**Линейная траектория** (28)	**Линейная сглаженная** (30)	**Экспоненциальная траектория** (29)	**Траектории, рассчитанные по** (31)		**Траектории Ершова I** (32)	**Траектории Ершова II** (33)
				$k=6$	$k=1/6$		
1992	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
1993	0,98	0,98	0,99	1,10	0,99	0,93	0,93
1994	1,09	1,09	1,10	1,07	1,10	1,07	1,08
1995	1,06	1,06	1,07	1,07	1,07	1,03	1,04
1996	1,08	1,07	1,09	1,11	1,09	1,06	1,07
1997	1,08	1,08	1,09	1,12	1,09	1,07	1,08
1998	1,00	0,99	1,01	1,03	1,01	1,03	1,05
1999	0,91	0,91	0,92	0,96	0,92	0,93	0,95
2000	0,99	0,99	1,00	1,02	1,00	1,00	1,02
2001	1,08	1,07	1,09	1,11	1,09	1,10	1,12

В табл. 2 находятся рассчитанные по описанным выше траекториям (28)-(33) индексы цен Дивизиа. В табл. 3 приведены индексы объема Дивизиа, вычисленные по тем же модельным данным. В первую очередь необходимо отметить, что моделирование удалось. Значения индексов не противоречат друг другу, они одного порядка, хотя и имеют значительные расхождения. Это очень важный результат, подтверждающий, что моделирование через непрерывное представление цены и потока объёма возможно.

Тем не менее, все индексы дают разные значения. Некоторые из них близки между собой (например, значения индексов Дивизиа, рассчитанных по линейной и линейно-сглаженной траектории), другие имеют более серьезные отличия (например, индексы по линейной и по Ершова II траекториям). Эти результаты доказывают, что существенным образом на значение индекса Дивизиа влияет выбор пути, по которому идет интегрирование.

Табл. 4 демонстрирует выполнение требования о стоимости для непрерывных индексов цен и объемов Дивизиа: произведение индекса объема и индекса цены должно дать индекс стоимости. Это свойство следует из самого построения индекса и не может нарушаться. В нашем случае расхождения свидетельствуют о некоторой вычислительной ошибке, связанной с шагом интегрирования и с ограниченной мантиссой, используемой при расчётах. В то же время, результаты этой таблицы (малые отклонения от значения индекса стоимости) говорят о корректности вычислений непрерывного индекса Дивизиа.

Табл. 4. Проверка требования о стоимости для непрерывного индекса Дивизиа объема, рассчитанного по различным траекториям изменения цен и объемов.

Период	**Линейная траектория** (28)	**Линейная сглаженная** (30)	**Экспоненциальная траектория** (29)	**Траектории, рассчитанные по** (31)		**Траектории Ершова I** (32)	**Траектории Ершова II** (33)	**Индекс стоимости**
				$k = 6$	$k = 1/6$			
1992	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,00
1993	8,7	8,7	8,7	9,3	8,7	7,8	7,8	8,65
1994	27,61	27,6	27,6	26,1	27,6	25,9	25,9	27,57
1995	55,5	55,5	55,5	54,1	55,5	52,4	52,3	55,44
1996	62,5	62,5	62,5	62,2	62,4	59,3	59,2	62,37
1997	69,2	69,2	69,1	69,2	69,1	66,5	66,5	69,03
1998	132,8	132,8	132,8	132,8	132,8	133,7	133,8	132,58
1999	149,3	149,3	149,2	151,6	149,2	148,1	148,1	149,05
2000	190,2	190,2	190,2	189,9	190,1	187,5	187,5	189,89
2001	251,9	251,8	252,0	251,4	251,6	251,6	251,7	251,44

Заключение

Индексы Дивизиа не решают проблему выбора метода расчета индекса цен. Исследования, приведенные в работе, подтверждают этот тезис. Невозможность использования для построения индексов Дивизиа непрерывных функций, отражающих изменение цены и потока объёмов в силу дискретности имеющихся данных, приводит к необходимости поиска приближений к значению индекса. Существует два пути аппроксимации индексов Дивизиа. В работе приведены дискретные аппроксимации первого и второго порядка. Полученные формулы – известные методы расчёта показателей динамики, такие как Ласпейреса, Пааше, Фишера, Торнквиста, Вартиа, Тейла и др.. Возникает проблема выбора разностной аппроксимации конструкций Дивизиа, а, следовательно, выбора между вышеперечисленными индексами, для которых имеются существенные расхождения значений при расчёте на одних и тех же начальных данных.

Индексы Дивизиа дают теоретическое обоснование для использования цепных методов расчёта. Экономисты считают, что цепные индексы облают преимуществом

перед индексами по постоянной базе за счет учёта всех изменений базы расчёта, происходивших внутри рассматриваемого периода. В то же время, при существенной инфляции такие методы способны нарушать важнейшие требования, которые их аналоги по постоянной базе не нарушают. Например, требование о среднем (рассчитываемый индекс за весь период должен находиться в интервале минимального и максимального значения цен и объемов отдельных товаров), справедливое для выбранного метода расчёта с фиксированной базой, может нарушаться, если использовать цепную формулу. Такие примеры приведены в [2] для индексов Ласпейреса, Пааше.

Принципиальным при построении непрерывного индекса Дивизиа является проблема выбора траектории изменения цен и объемов в течение рассматриваемого периода. Так как не существует сведений о непрерывной динамике измеряемых явлений, то значение индекса будет зависеть от предложенного самим исследователем пути. Экономическое обоснование траекторий возможно, в том числе с точки зрения рационального покупателя, который определённым образом реагирует на изменение цен и стремиться максимизировать свою полезность. Причём, индекс будет однозначен, если предпочтения потребителя линейно однородны. Надо отметить, что такое представление поведения покупателя далеко от реальности. В работе исследовались несколько траекторий изменения цен и потока объёмов. Выбранные зависимости все могут использоваться для исчисления индекса Дивизиа и проблема его однозначного представления не решается. Таким образом, при использовании конструкций Дивизиа для вычисления индексов необходимо тщательно продумывать вид непрерывных зависимостей цены и потоков объёмов от времени, исходя из задач, стоящих перед исследователем.

Литература

1. Айзенберг Н.И., Мокрый И.В. *Построение индексов Дивизиа по разным траекториям* // Равновесные модели экономики и энергетики: Труды Всероссийской конференции и секции Математической экономики XIII Байкальской международной школы-семинара «Методы оптимизации и их приложения», Иркутск, Байкал, 3-7 июля 2005 года: Изд-во ИСЭМ СО РАН, 2005. С. 250-259.
2. Айзенберг Н.И., Солонина З.В. *Экспериментальные исследования расхождений индексов цен в зависимости от метода их расчета и интенсивности колебаний темпов роста на отдельные товары* // Методы исследования и моделирования технических, социальных и природных систем: сб.науч.тр. Новосибирск: Наука, 2003. С. 123-146.
3. Бессонов В.А. *О смещениях в оценках роста российских потребительских цен* // Экономический журнал ВШЭ, 1998. №1. С.31-66.
4. Зоркальцев В.И. *Агрегирование показателей: индексы Дивизиа-Конюса* // Равновесные модели экономики и энергетики: Труды Всероссийской конференции и секции Математической экономики XIII Байкальской международной школы-семинара «Методы оптимизации и их приложения», Иркутск, Байкал, 3-7 июля 2005 года: Изд-во ИСЭМ СО РАН. 2005. С. 284-294.
5. Зоркальцев В.И. *Индексы цен и инфляционные процессы*. Новосибирск: Наука. Сибирская издательская фирма РАН, 1996. С. 279.

6. Зоркальцев В.И. *Проблема агрегирования экономических субъектов* // Вестник Новосибирского государственного университета. Серия: социально-экономические науки, 2010. Т. 10. Вып. 1. С.107-118.
7. Ершов Э.Б. *Индексы цен и количеств Фишера и Монтгомери как индексы Дивизиа* // Экономика и математические методы, 2003. Т. 39. №2. С. 136-154.
8. Ершов Э.Б. *Факторная идентичность траекторных индексов, порождаемых конструкциями Дивизиа и Монтгомери, как определяющее свойство логарифмических индексов цен и количеств* // Экономический журнал ВШЭ, 2010. №1. С. 70-87.
9. *Российский статистический ежегодник*. М: Госкомстат России, 2001.
10. *Российский статистический ежегодник*. М: Госкомстат России, 2002.
11. Balk B. M. *Divisia price and quantity indices:80 years after* // Statistica Neerlandica, 2005. Vol. 59. Nr. 2. P. 119–158
12. *Consumer price index manual: Theory and practice*. Geneva, International Labour Office, 2004. P. 703.
13. Diewert W. E. *The early history of price index research*, in: W. E. Diewert and A. O. Nakamura (eds), 1993. Essays in index number theory. Vol. 1. North-Holland, Amsterdam.
14. Divisia, F. *L'indice monetaire et la theorie de la monnaie //* Revue d_ Economie Politique, 1925. №39. 842–861, 980–1008 P. 1121–1151
15. Köves, P. *Index theory and economic reality,* Akademiai Kiadoŕ, Budapest, 1983.
16. Reinsdorf M. B. *Divisia index and the representative consumer problem* // F.D.I.C., Washington, DC 20429, 1998.
17. Richter M. K. *Invariance axioms and economic indexes* // Econometrica, 1966. № 34. P. 739–755.
18. Samuelson, P. A. and S. Swamy *Invariant economic index numbers and canonical duality: survey and synthesis* // American Economic Review, 1974. № 64. P. 566–593.
19. Vogt A. *The natural index and the Divisia index on the straight line as well as the Divisia index on the exponential line* // Communications in Statistics – Part A: Theory and Methods, 1986. №15. P. 3567–3582.