УДК 330.42
ключевые слова: нелинейная динамика, ВРП, хаотические состояния, фрактальный подход, прогнозирование, время достоверного прогнозирования

Г. П. Быстрай, Л. А. Коршунов, И. А. Лыков, Н. Л. Никулина, С. А. Охотников

МЕТОДЫ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ В АНАЛИЗЕ И ПРОГНОЗИРОВАНИИ ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМ РЕГИОНАЛЬНОГО УРОВНЯ[1]

С помощью фрактального подхода в рамках нелинейной динамики разработана методика анализа и прогнозирования поведения временных рядов экономических систем регионального уровня. Если устремить длину исходного ряда к бесконечности, и при этом окажется, что ряд является статистически фрактальным, то возможно его неплохое (статистически) предсказание на интервалы времени, существенно превышающие длину самого ряда. Показано, что используемый в работе метод Хёрста можно применять с хорошей точностью даже к относительно небольшим массивам данных.

Глобальный финансово-экономический кризис определил необходимость разработки долгосрочных прогнозов социально-экономического и научно-технического развития регионов Российской Федерации.

Оценка перспектив развития, необходимость предвидеть возможные пути и результаты предпринимаемых действий существовали на всех ступенях развития общества. Прогноз представляет собой научно обоснованное суждение о возможных состояниях объекта в будущем и (или) об альтернативных путях и сроках их существования. Под прогнозированием систем понимается вид научно-практической деятельности, охватывающий сферы методологии, организации, информационного, технического и кадрового обеспечения процессов разработки прогнозов, основанный на концепции систем [11].

Разработка долгосрочного прогноза основывается на выдвинутой Н. Д. Кондратьевым и развитой современными российскими и зарубежными учеными теории предвидения [18], которая исходит из необходимости познания и использования закономерностей научно-технического и социально-экономического развития общества в будущем и является исходной базой для выбора приоритетов и обоснования стратегических планов [9, с. 79].

В настоящее время в России долгосрочные прогнозы строятся по методологии интегрального макропрогнозирования, синтезирующей теорию предвидения и учение о циклах, кризисах и инновациях Н. Д. Кондратьева, цивилизационный подход и учение о ноосфере В. И. Вернадского и Н. Н. Моисеева, балансовый метод макропрогнозирования В. В. Леонтьева. Также российские ученые во главе с Н. А. Махутовым разработали методологию оценки рисков при долгосрочном прогнозировании, позволяющую повысить надежность прогнозов [9, с. 8]. Методология интегрального макропрогнозирования дополняется и конкретизируется с помощью методологии форсайта, получившей широкое распространение за рубежом и в России в последние десятилетия [9, с. 83].

Предложена следующая классификация методов прогнозирования [4, 12]:

1. Методы экстраполяции.
2. Методы экспертизы, или экспертных оценок.
3. Методы моделирования — использование экономико-математических моделей эконометрического типа (факторные и структурные) [10], основным достоинством которых является внутренняя согласованность экономических показателей, характеризующих процесс, за счет учета в моделях различных существенно важных для объекта исследования взаимосвязей [13].

На сегодняшний день одной из наиболее популярных и активно развивающихся научных парадигм стала синергетика, или теория самоорганизации. В рамках синергетики с целью прогнозирования развития экономических систем возможно применение методов нелинейной динамики, среди которых можно выделить

[1] Работа финансировалась Российским фондом фундаментальных исследований (проект РФФИ 10-06-00042а) и Целевой программой УрО РАН поддержки междисциплинарных проектов, выполняемых в содружестве с учеными СО и ДВО РАН в рамках интеграционного проекта «Социально-экономический иммунитет региона: диагностика и прогноз защищенности от кризисных явлений» (проект №09-С-1001 «Диагностика состояния моделирование тенденций и прогноз развития регионов России на период до 2030 года»).

построение неравновесных потенциальных функций с целью определения устойчивости (локальной или глобальной) состояний региональной экономики [7], а также фрактальный метод.

Небольшое количество точек временного ряда показателей рассматриваемого процесса является неким препятствием для построения адекватной экономико-математической модели. Использование для прогнозирования методов нелинейной динамики позволяет достроить временной ряд на определенные интервалы, учитывая при этом время достоверного прогноза.

Теоретические основы прогнозирования. Фрактальный подход

Применение метода Хёрста в прогнозировании временных рядов. Метод Хёрста, называемый также методом нормированного размаха или *R/S*-методом [15, 19, 20], заключается в установлении временной зависимости от длины интервала нормированного размаха (*R/S*). Для имеющегося временного ряда $\xi(t)$ вычисляется среднее значение $\langle\xi(t)\rangle$ на интервале времени τ, имеющем ту же размерность, что и время *t*:

$$\left\langle \xi(t) \right\rangle_{\tau} = \frac{1}{\tau}\sum_{t=1}^{\tau}\xi(t). \qquad (1)$$

Затем рассчитывается зависимость накопленного отклонения $X(t, \tau)$ на интервале времени τ:

$$X(t,\tau) = \sum_{u=1}^{t}\left\{\xi(u) - \left\langle \xi(t) \right\rangle_{\tau}\right\}, \qquad (2)$$

по которому вычисляется функция абсолютного размаха *R*:

$$R(\tau) = \max_{1\le t\le\tau} X(t,\tau) - \min_{1\le t\le\tau} X(t,\tau). \qquad (3)$$

Размах зависит от длины интервала τ и может расти с ее увеличением. Далее вычисляется зависимость безразмерной функции *R/S* от длины временного интервала τ делением *R* (3) на стандартное отклонение *S* ряда $\xi(t)$:

$$S(\tau) = \sqrt{\frac{1}{\tau}\sum_{t=1}^{\tau}\left\{\xi(t) - \left\langle \xi(t) \right\rangle_{\tau}\right\}^2}.$$

Хёрст по результатам исследования многих природных процессов установил эмпирическую связь между нормированным размахом *R/S* и длиной интервала τ через показатель *H* [20]:

$$R/S = (\tau/2)^{H}, \qquad (4)$$

где *H* может принимать значения от 0 до 1. Это наблюдение Хёрста интересно потому, что если отсутствует долговременная статистическая зависимость (случайный ряд), данное отношение должно ассимптотически стремиться к $\tau^{1/2}$ при стремлении длины выборки к бесконечности. Значения же $H > 0{,}5$ характеризуют сохранение тенденции ряда к росту или убыванию как в прошлом, так и в будущем (персистентное поведение) [19]. Если $H < 0{,}5$, это означает склонность ряда к смене тенденции: рост сменяется убыванием и наоборот. Все эти свойства, как уже отмечалось выше, справедливы для достаточно длинных временных рядов. Однако для практических расчетов метод Хёрста можно применять с хорошей точностью даже к относительно небольшим массивам данных.

Фрактальная размерность временного ряда. Как известно, временные ряды могут представлять собой фрактальные объекты [1,5]. Под фракталом понимают множество, части которого подобны целому в некотором смысле [1]. Основной характеристикой таких объектов является фрактальная размерность *D*, которая принимает дробные значения. Для временных рядов $D \in [1;2]$. Мандельброт установил связь между фрактальной размерностью *D* ряда и его показателем Хёрста H:

$$D = 2 - H. \qquad (5)$$

Данное равенство справедливо только для временных рядов, имеющих фрактальную структуру, то есть когда часть ряда подобна целому в некотором смысле. Но это выполняется для большинства фрактальных рядов лишь статистически. Такие ряды получили название статистических фракталов [1]. Обычно фрактальная размерность множества точек вычисляется из зависимости $N(r) = Nr^{D}$, где $N(r)$ — количество точек в круге радиусом *r* с центром в центре масс данного множества, *D* — искомая фрактальная размерность.

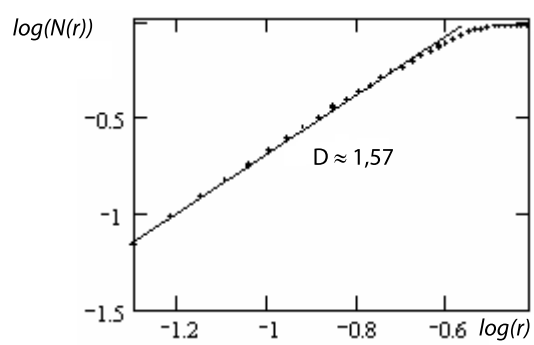


Рис. 1. *Способ вычисления фрактальной размерности*

На рис. 1 приведен пример определения фрактальной размерности множества точек. В двойном логарифмическом масштабе значением фрактальной размерности будет тангенс угла наклона прямой. Обычно определение D производится методом наименьших квадратов, так как всегда существует разброс точек.

Существует также взаимооднозначная связь между показателем H фрактального временного ряда и его корреляционной функцией C [4, 1], которую можно определить следующим образом:

$$C = 2^{2H-1} - 1. \quad (6)$$

Из данного равенства видно, что корреляционная функция статистически фрактального временного ряда не зависит от времени, а зависит лишь от показателя Хёрста H. Очевидно также, что для случайных временных рядов $C = 0$, так как показатель Хёрста H для них равен 0,5. Отсюда также вытекает и следствие о персистентном и антиперсистентном поведении ряда [1,5]. Если $H > 0{,}5$, то $C > 0$, а значит, существует корреляция между прошлыми и будущими значениями ряда. Следовательно, если в прошлом наблюдался рост, то он будет наблюдаться и в будущем лишь при $C > 0$, что также справедливо и для тенденции к убыванию по определению корреляционной функции. Отсюда же следует и антиперсистентность поведения статистически фрактальных временных рядов.

Следует отметить, что большая часть из вышесказанного справедлива именно для статистически фрактальных временных рядов, для которых характерной особенностью является независимость H от интервала τ, называемого также временным масштабом. Это означает постоянство тангенса угла наклона функции $\ln(R/S)$ на разных временных масштабах, что характерно лишь для случайных и статистически фрактальных временных рядов. Если же тангенс угла наклона (H) для конкретного временного ряда меняется в зависимости от значения τ, это свидетельствует о слабой фрактальности данного ряда. Данное непостоянство H может наблюдаться и для слишком коротких временных рядов, статистика которых скудна. Очевидно, что в этом случае C будет зависеть от времени. Это также следует и из появления зависимости от временного масштаба показателя Хёрста H.

Можно изменить данный метод для анализа и прогнозирования рядов произвольной формы, в том числе статистически нефрактальных и даже периодических. Для этого построим функцию Хёрста R/S как функцию τ. Новый показатель Хёрста H^* определим лишь по двум соседним точкам функции $\ln(R/S)$ от логарифма τ как производную данной функции:

$$H^*(\tau_k) = \frac{\ln\left(R(\tau_{k+1})/S(\tau_{k+1})\right) - \ln\left(R(\tau_k)/S(\tau_k)\right)}{\ln(\tau_{k+1}) - \ln(\tau_k)}. \quad (7)$$

Если построить зависимость H^* от τ, то можно характеризовать этот временной ряд как случайный, фрактальный или периодический, и выделить некоторые его свойства. К числу этих свойств относится максимальное время прогнозирования (максимальная длина реконструкции ряда).

Классификация рядов. Анализ поведения $H^*(\tau)$, которую дальше будем называть характеристической функцией, позволяет по постоянству H^* классифицировать ряд как фрактальный или нефрактальный. Если $H^* = \text{const}$, то есть не зависит от τ, и при этом $H^* \neq 0{,}5$, то ряд можно считать статистически фрактальным с фрактальной размерностью $D = 2 - H^*$ и корреляционной функцией:

$$C = 2^{2H^*-1} - 1.$$

Если $H^* = 0{,}5$ — ряд случаен, его фрактальная размерность имеет значение $D = 1{,}5$, а корреляционная функция, так же как и у фрактального ряда, не зависит от времени и равна 0. То есть при $H^* = \text{const}$ справедливы формулы для определения фрактальной размерности D и корреляционной функции C.

Если же функция $H^*(\tau)$ испытывает скачок при каком-либо значении τ^* — это означает, что существует некоторый характерный временной масштаб изменения фрактальной размерности D. При этом для периодических функций будет наблюдаться переход от $H^* > 0{,}5$ к $H^* < 0{,}5$. Для рядов с локальной антиперсистентностью и глобальным поддержанием тенденции характеристическая функция будет испытывать обратный скачок. В этом случае можно выделить характерное время смены тенденции τ^*, при котором и произошел скачок.

Таким образом, по поведению характеристической функции можно классифицировать временные ряды как статистически фрактальные, случайные, периодические и выделить еще один тип с глобальной персистентностью, который характерен для функций роста или убывания.

Прогноз будущих значений. Идея прогноза заключается в том, что ряд, включающий добавленную точку, дает характеристическую функцию ту же, что и исходный временной ряд. Следовательно, значение показателя Хёрста H

и фрактальной размерности D для исходного ряда и ряда, включающего добавленную точку, совпадают.

Характеристическая функция позволяет нам статистически оценить характер поведения ряда на различных временных масштабах. Предполагая статистические свойства ряда неизменными (независимыми от времени), можно предсказать значения временного ряда в будущем. Пусть имеется временной ряд $x(t_n)$ с числом элементов N и временным шагом Δt, и для него известна $H^*(\tau)$, где $\tau \in [2\Delta t, (N-1)\Delta t]$. Будем считать характеристическую функцию не зависящей от времени, а зависящей только от временного масштаба τ. Тогда $H^*(\tau)$ будет одинаковой как для прошлых значений ряда, так и для будущих. Следовательно, можно найти такую точку $x^*(t_{N+1})$, что $H^*(\tau)$, вычисленная для нового временного ряда $x^*(t_n)$ с числом элементов $N+1$, даст наименьшее среднеквадратичное отклонение от характеристической функции для исходного ряда $x(t_n)$. Таким образом, будет найдено будущее значение $x^*(t_{N+1})$, статистически не меняющее структуру (поведение) исходного временного ряда $x(t_n)$. Далее, приняв за исходный ряд $x(t_n)$ вновь полученный $x^*(t_n)$ с числом элементов на единицу большим, чем у исходного, можно повторить процедуру нахождения следующего значения $x^*(t_{N+2})$ и так далее.

К недостаткам данного метода следует отнести то, что данное предсказание будет справедливо лишь статистически и основываться на неизменной фрактальной структуре ряда как в прошлом, так и в будущем. Фрактальная структура ряда определяется сложившейся системой социально-экономических отношений, которые меняются со временем незначительно. Если же устремить длину исходного ряда (N) к бесконечности, и при этом окажется, что ряд является статистически фрактальным ($H^* = \text{const}$), то возможно его неплохое (статистически) предсказание на интервалы времени, существенно превышающие длину самого ряда.

Время достоверного прогноза. Предсказать конечный временной ряд больше, чем на половину его длины с приемлемой точностью невозможно, так как статистика на таких временных интервалах для исходного ряда становится довольно скудна. Также следует учитывать, что предсказание каждого последующего значения основывается в том числе и на предсказании предыдущего (для $N+2$ точки и так далее), следовательно, статистическая точность предсказания снижается на каждом шаге алгоритма, то есть для каждой вновь предсказанной точки $x^*(t_{N+n})$, где $n \geq 2$. Это также накладывает ограничение на время прогноза сверху. Предсказание ряда даже на половину его длины становится невозможным.

В случае статистически нефрактальных временных рядов, для которых H^* существенно зависит от временного масштаба ($H^*(\tau)$), максимальное время прогноза не может превышать значения временного масштаба τ^*, начиная с которого функция $H^*(\tau)$ стремится к 0,5. При этом значении теряется корреляция между прошлыми и будущими значениями временного ряда, то есть ряд становится случайным [1,5]. Данное значение τ^* можно также считать максимальным временем достоверного прогноза ряда, как и величину t_r, определенную по показателям Ляпунова.

Хаотические свойства временных рядов экономических показателей

Исследования хаотических свойств временных рядов проведено для Алтайского края — одного из регионов агропромышленной специализации, имеющего свои особенности в социально-экономическом развитии.

В силу существующего механизма ценообразования для агропромышленных регионов валовой региональный продукт на душу населения традиционно заметно ниже, чем в среднем по регионам России, в результате чего создаваемой добавленной стоимости зачастую недостаточно даже для режима простого воспроизводства.

Ограниченное по объему и структуре предложение рабочих мест на сельском рынке труда влечет за собой более высокие показатели безработицы в агропромышленных регионах. Так, уровень общей безработицы в 2008 г. в Алтайском крае составил 8,4% [5], что в 1,3 раза выше среднероссийского показателя [14].

Характерной чертой агропромышленных регионов является исторически сложившийся низкий уровень жизни. В силу низкого уровня оплаты труда в сельском хозяйстве номинальная начисленная среднемесячная заработная плата в Алтайском крае составляла в 2008 г. 9732 руб. [12] против 17290,1 руб. в среднем по России [5]. Соотношение денежных доходов и величины прожиточного минимума 215 и 329,5% [17] соответственно.

Сравнительно невысокие доходы населения предопределили низкую емкость внутреннего рынка потребительских товаров: розничный товарооборот на душу населения в Алтайском крае в 2008 г. в 1,4 раза ниже, чем в среднем по России [3].

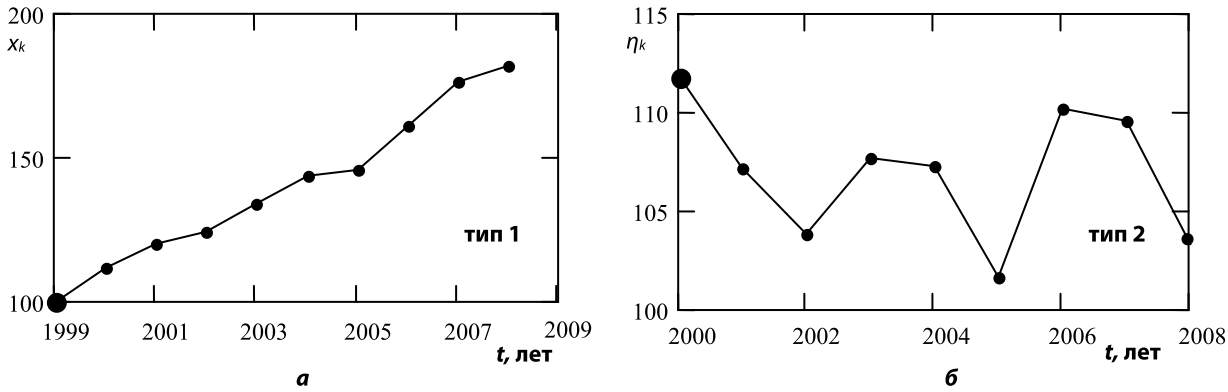


Рис. 2. *Два типа характерных графиков для анализа временных рядов валового регионального продукта для Алтайского края: а — валовой региональный продукт, % к базовому периоду (к 1999 г.), начальное значение, соответствующее 1999 г., принято за 100%, б — темп роста валового регионального продукта к предыдущему году, %*

Из 12 характеристик временных рядов, приводимых в этой статье, нижеследующие свойства 1–3, 6, 10–12 являются в прогнозировании вспомогательными, указывая, в том числе на хаотичность описываемых процессов, а свойства 4, 5, 7–9 необходимы для вычисления показателя Хёрста, фрактальной размерности, показателей Ляпунова, времени достоверного прогноза, и, следовательно, прогноза данных процессов.

1. Хаотические временные ряды по годам. Типичный временной ряд экономического показателя, такого как валовой региональный продукт Алтайского края, приведенного к базовому периоду, представлен на рис. 2а, темп роста данного показателя к предыдущему году, в процентах — на рис. 2б.

Если найти методом наименьших квадратов тренды для обеих ломаных кривых и продлить их на последующие годы, то прогноз на основании этих трендов будет недостоверным, т. к. он не будет учитывать фрактальную природу представленных показателей, а значит, и сложившиеся в системе социально-экономические отношения.

2. Псевдофазовый портрет характеризует зависимость каждого последующего значения показателя от предыдущего: $x_{k+\Delta} = f(x_k)$ — для ВРП, $\eta_{k+\Delta} = f(\eta_k)$ — для темпа ВРП. Расплывание псевдофазового портрета происходит из-за забывания системой начальных условий. За время t_r системы как первого так второго типа полностью заполнят пространство, ограничивающее ее, и забудут свои начальные условия.

Система, показанная на рис. 3а, 3б (тип 1) с течением времени стремится заполнить верхнюю полуплоскость, следовательно, время забывания начальных условий для такой системы нельзя точно определить. Система, показанная на рис. 3в (тип 2) уже за время $t_r = 1$ год забывает свои начальные условия, это приводит к тому, что псевдофазовый портрет становиться сильно размытым. С дальнейшим увеличением сдвига вид псевдофазового портрета не изменяется (размытие примерно одинаково).

3. Фазовый портрет — это зависимость скорости изменения координаты от самой координаты. Циклическое поведение фазовой

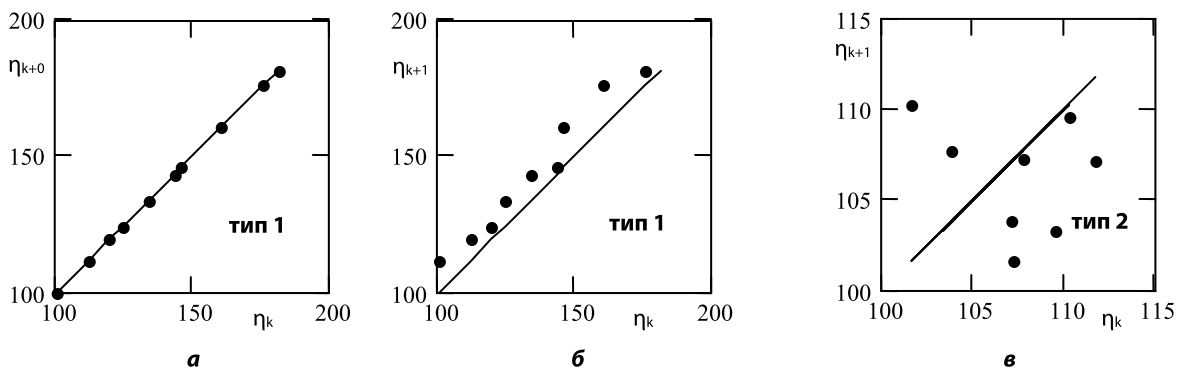
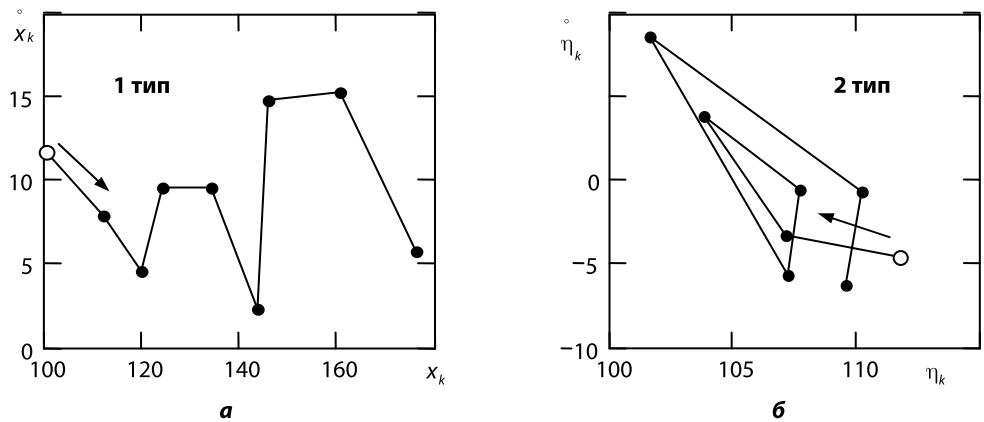


Рис. 3. *Псевдофазовые портреты нелинейной динамики экономических показателей. В классических (не в хаотических) системах каждое последующее значение зависит от предыдущего, что изображается в виде прямой линии*



а *б*

Рис. 4. *Фазовые портреты нелинейной динамики — зависимость скорости изменения показателя от значения показателя для временного интервала k: а — неконсервативная система (первый тип), б — циклическое поведение (второй тип)*

траектории свидетельствует о наличии притягивающего множества (аттрактора). Свойством фазового портрета также может быть фазовый объем (пространство, занимаемое фазовой траекторией системы), который может сжиматься, расширяться или оставаться неизменным. Замкнутая траектория свидетельствует о консервативности системы.

Скорость изменения показателя вычисляется как отношение приращения по показателю к временному шагу (1 год): $\dot{x}_k = (x_{k+1} - x_k)/1$. Для первого типа показателей не характерно циклическое поведение, что говорит об отсутствии притягивающего множества. Траектория не замкнута — неконсервативная система. Для ряда второго типа характерно циклическое поведение, что говорит о наличии притягивающего множества — аттрактора, фрактальная структура которого отражает фрактальную природу описываемой экономической системы.

4. Показатель Хёрста *H* (4) указывает на поддержание повышающей или понижающей тенденции, если $H > 0{,}5$. Значения $H < 0{,}5$ указывают на склонность к смене тенденции (если в прошлом был рост — в будущем произойдет спад и наоборот). Вычисяется H методом наименьших квадратов по всему временному ряду как тангенс угла наклона функции $\ln(R/S)$ (4) от аргумента временного масштаба $\ln(\tau)$. При этом параметр временного масштаба τ пробегает все значения от $2\Delta t$ до $N\Delta t$ с шагом Δt, где Δt — шаг временного ряда, а N — количество точек ряда. Функция R/S для более богатой статистики усредняется по всем отрезкам длины τ исходного временного ряда.

5. Фрактальная размерность *D*. Одним из критериев хаотического поведения системы является фрактальность псевдофазового портрета. Для самоподобных кривых (статистически фрактальных временных рядов) существует связь между показателем Хёрста H и фрактальной размерностью D [2, 15] в виде выражения (5). Данное соотношение справедливо для временных рядов, временной шаг которых мал по сравнению с длительностью процесса, породившего данный временной ряд. Это означает, что для строгого выполнения данного соотношения необходимо исследовать временной ряд, как кривую, описывающую фрактальную функцию, с высоким разрешением по времени, то есть в локальном пределе. Если разрешение по времени не мало по сравнению с величиной шага исходной фрактальной кривой, то будет получаться предельное значение $D = 1$ [15, 18].

Значение фрактальной размерности D говорит о сложности структуры анализируемого временного ряда [18]. Для временных рядов значение $D \in [1;2]$, это непосредственно следует из ограничения на изменение показателя Хёрста. Если значение D близко к единице — структура ряда простая, ряд можно аппроксимировать кривой. Размерность фрактальных временных рядов лежит в интервале $D \in (1;2]$. Таким образом, использование фрактального подхода к фазовым переходам позволяет количественно охарактеризовать такие взаимосвязанные свойства систем, как тенденция развития и самоподобие структуры.

6. Корреляционная функция *C*. Функция $C = 2^{2H^* - 1} - 1$ — вычисляется исходя из предположения о фрактальности ряда. Если ряд фрактален, то корреляционная функция не зависит от времени. В этом случае возможно прогнозирование на неограниченно больших интервалах времени. Данный ряд может быть фрактальным только статистически, поэтому время прогноза ограничено (смотри пояснения к свойству 7). Если корреляционная функция $C > 0$ — это (так

же как и значение показателя Хёрста $H > 0{,}5$) говорит о персистентном поведении системы, т. е. о поддержании тенденций к повышению или к понижению. Для антиперсистентного поведения [2, 15] $C < 0$.

7. Прогноз будущих значений временного ряда в данной работе производится с помощью модернизированного метода Хёрста. Алгоритм построения следующей точки ряда при прогнозе заключается в переборе всех предполагаемых значений исследуемой величины с определенным шагом и вычислении для ряда, содержащего достроенную точку, функции $R(\tau)/S(\tau)$ и последующим ее сравнением с $R(\tau)/S(\tau)$ — функцией исходного ряда. Выбирается точка, дающая для прогнозируемого значения показателя такую же (или наиболее близкую) функцию Хёрста, какая была и для исходного ряда. Следовательно, и $H^*(\tau)$ для вновь полученного ряда (с новой точкой) должна совпасть с $H^*(\tau)$ для исходного ряда (см. (5)). В качестве показателя качества совпадения функций используется функционал среднеквадратичного отклонения одной функции от другой.

Затем берется следующая точка, рассматривается следующий временной промежуток (через год) и производятся те же действия. Аналогично поступают и для следующих точек.

На рис. 5 показаны функции R/S от временного масштаба τ для исходного ряда и ряда, содержащего дополнительно 3 достроенные по описанному алгоритму точки. Видно, что обе функции с хорошей точностью совпадают. Неполное совпадение можно объяснить конечным шагом перебора значений для каждой вновь достроенной точки. Параметр временного масштаба τ используется также и для вычисления $H^*(\tau)$.

В результате анализа также было выяснено, что более рационально применять данный метод к темпам изменения показателей, так как исследуемые временные ряды темпов имеют более сложную фрактальную структуру, чем временные ряды самих показателей.

На рис. 6 приведен долгосрочный прогноз по темпам роста валового регионального продукта для Алтайского края. Прогнозируемые точки вычислены с использованием описанного выше фрактального метода.

Прогноз по ВРП (рис. 7) показывает его падение почти в два раза в 2011–2012 гг., что можно было бы объяснить присущими

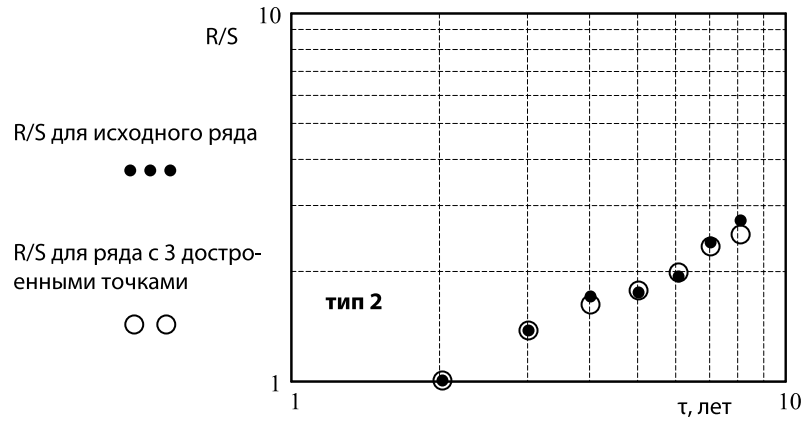


Рис. 5. *Сравнение функций Хёрста для исходного и достроенного на 3 года вперед временных рядов темпа изменения показателя ВРП (тип 2) для экономической системы Алтайский край — Сибирский округ*

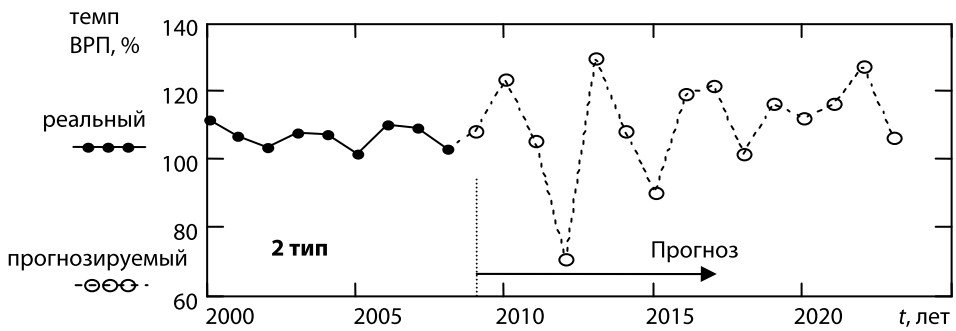


Рис. 6. *Реальное изменение темпов роста ВРП (в % к предыдущему году) для Алтайского края 2000–2008 гг. и их прогноз до 2023 года*

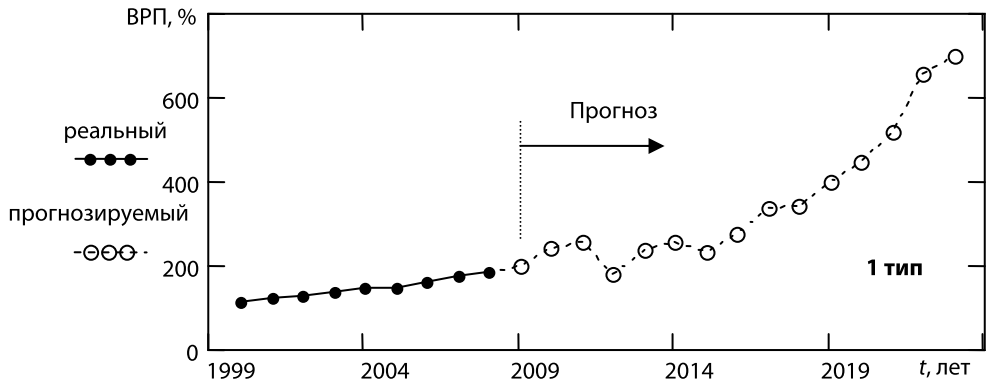


Рис. 7. *Реальное изменение ВРП (в % к базовому периоду — 1999 г.) для Алтайского края в 1999–2008 гг. и его прогноз до 2023 года Начальное значение, соответствующее 1999 году, принято за 100%*

рассматриваемому региону внутренними нелинейностями и сложившимися экономическими отношениями, а значит и своим самоподобием, определяющим фрактальность временного ряда. Однако системный, являющийся внешним для Алтайского края кризис 2009–2010 гг., ускорил запуск кризисного механизма, который и проявился, вероятно, на несколько лет раньше. Следует отметить, что на рис. 6 и 7 к области достоверного прогноза, определенной по показателям Ляпунова относятся лишь первые 3 (рис. 6) и 2 (рис. 7) точки. Остальные точки, начиная с четвертой и пятой соответственно, достроены также по фрактальному методу, но прогноз по данным точкам недостоверен.

Наблюдается зона притяжения фазовых траекторий, как для реального, так и прогнозируемого временного ряда (рис. 8). На протяжении большого количества лет скорость изменения и значения темпов не выходят за пределы зоны притяжения. Прогноз остается справедливым до тех пор, пока фрактальные свойства временного ряда, соответствующие сложившейся структуре экономических отношений, не изменятся.

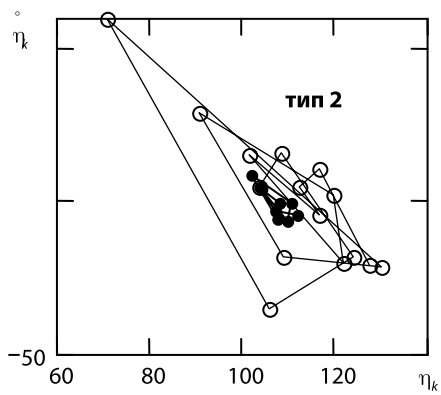


Рис. 8. *Фазовый портрет нелинейной динамики — зависимость скорости изменения показателя от значения показателя для временного интервала k — при циклическом поведении (2 тип) с учетом прогнозируемых точек, отмеченных окружностью*

8. Показатели Ляпунова. Чтобы измерить хаос в системе, необходимо установить чувствительную зависимость от начальных условий. Как известно, две изначально близкие друг к другу траектории хаотической системы в фазовом пространстве экспоненциально расходятся с течением времени. За время t_r, которое называют временем забывания начальных условий, информация о начальных условиях в системе полностью утрачивается. Одной из основных характеристик такой системы являются показатели Ляпунова. Для временных рядов можно сделать предположение о наличии как минимум трех показателей Ляпунова: положительного, нулевого и отрицательного [8].

Если δ_0 — мера начального расстояния между двумя исходными траекториями для переменной $\delta(t)$:

$$\delta(t) = \left|\eta(t) - \gamma(t)\right|, \qquad (8)$$

где $\eta(t)$ и $\gamma(t)$ — две изначально близкие траектории, которые с течением времени расходятся по закону:

$$\delta(t) = \delta_0 e^{\lambda t},$$

где λ — положительный показатель Ляпунова (λ_p). Если $\lambda_p \to \infty$, то процесс, происходящий в системе случаен (траектории разбегаются за бесконечно малое время), для периодических процессов $\lambda_p < 0$. При наличии хаоса в системе $\lambda_p \in (0,+\infty)$, но при этом остается конечным числом. Таким же образом можно описать и экспоненциальную сходимость двух траекторий через отрицательный показатель Ляпунова λ_n.

Для системы Алтайский край — Сибирский округ определяется временной ряд эволюции расстояния между траекториями развития Алтайского края (η) и Сибирского округа (γ):

$$\delta_k = \left|\eta_k - \gamma_k\right|. \qquad (9)$$

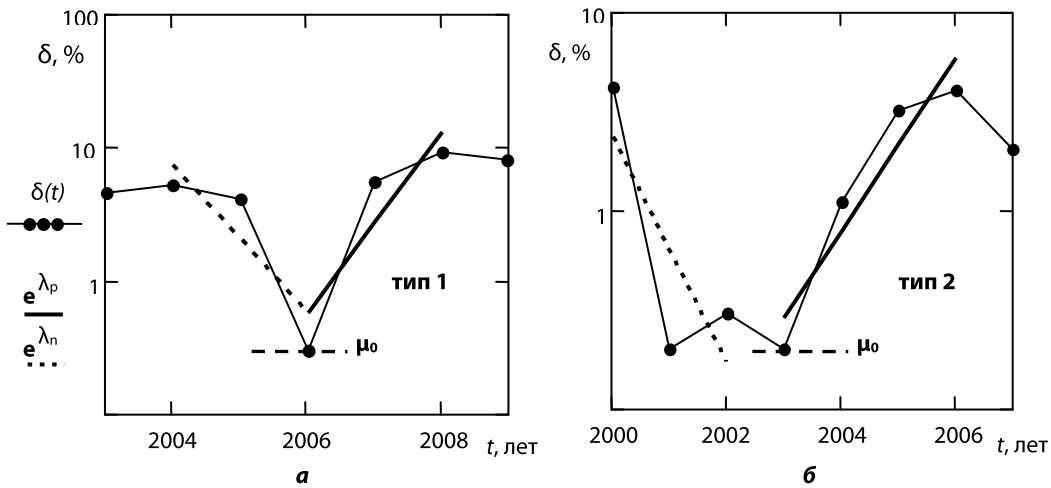


Рис. 9. *Определение показателей Ляпунова для двух типов представляемых экономических показателей: а) для разбегания траекторий по показателю ВРП (в % к базовому периоду — 1999 г.) и б) для разбегания траекторий по темпу роста ВРП для системы Алтайский край — Сибирский округ*

Далее методом наименьших квадратов вычисляется показатель Ляпунова, как тангенс угла наклона функции $y_k = \ln(\delta_k)$ переменной k, имеющей размерность времени и измеряемой в годах. Для каждой пары траекторий γ и η нужно выбирать интервал вычисления как положительного, так и отрицательного показателей Ляпунова. Для временного ряда δ_k функции $\delta(t)$ выбирается временной интервал, на котором показатель Ляпунова $\lambda_p > 0$. Методом наименьших квадратов находятся параметры прямой линии, аппроксимирующей временной ряд $y_k = \ln(\delta_k)$. Аналогично поступают и для нахождения отрицательного показателя Ляпунова λ_n.

Система, описываемая рис. 9, имеет три показателя Ляпунова. Жирные пунктирные линии найдены методом наименьших квадратов. В логарифмическом масштабе ее положительный наклон дает $\lambda_p > 0$, отрицательный — $\lambda_n < 0$. Имеется еще один показатель Ляпунова, соответствующий почти горизонтальным линиям $\lambda_0 \approx 0$. Положительный наклон свидетельствует о наличии хаотических пульсаций, отрицательный — о регулярных процессах

9. Максимальное время достоверного прогноза t_r. Для расчета предельного времени достоверного прогноза через положительный показатель Ляпунова используется формула Г. П. Быстрая, связывающая начальный фазовый объем μ_0, занимаемый динамической системой; предельное значение фазового объема L (см. рис. 6), до которого расширяется фазовый объем системы и которое связано с размером описываемого аттрактора; и положительный показатель Ляпунова λ_p со временем забывания динамической системой начальных условий t_r [1]:

$$t_r = \frac{1}{\lambda_p} \cdot \ln\left(\frac{L}{\mu_0}\right). \qquad (10)$$

В данном случае t_r является максимальным временем достоверного прогноза, то есть точного предсказания состояний нелинейной системы, так как за это время динамическая система полностью забывает свои начальные условия и возвращение в исходную точку из состояния в момент времени, больший t_r невозможно. Формула (10) переходит в формулу Г. Заславского [см. в 6] при $L = 1$. Таким образом, теряется корреляция (взаимосвязь) будущих значений с прошлыми, и точное предсказание поведения системы на интервалах времени, больших t_r становится невозможным. На большее время возможны лишь статистические предсказания.

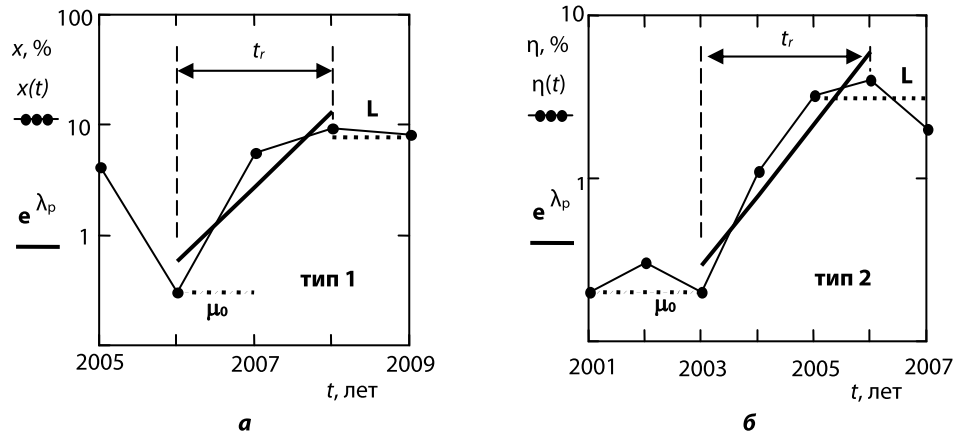
Для расчета предельного значения фазового объема (L) задается интервал ряда, где $\delta(t)$ выходит на плато (максимум):

$$L = \frac{1}{n}\sum_k \delta_k, \qquad (11)$$

где δ_k — элемент временного ряда (берутся значения на плато), n — количество значений элементов функции на плато. Из рис. 9б видно, что для системы Алтайский край — Сибирский округ функция $\delta(t)$ темпа роста ВРП выходит на насыщение в 2005–2007 годах, следовательно, выражение (11) примет следующий вид:

$$L = \frac{1}{3}\sum_{k=2005}^{2007} \delta_k.$$

Аналогично вычисляется L и для самого показателя (рис. 10а). В качестве значения начального фазового объема μ_0 выбирается



а *б*

Рис. 10. *Вычисление времени достоверного прогноза t_r по расширению фазового объема системы Алтайский край — Сибирский округ (а — для первого типа временных рядов; б — для второго типа временных рядов (темп, % к предыдущему году))*

наименьшее значение $\delta(t)$, предшествующее процессу разбегания двух изначально близких фазовых траекторий (рис. 10). Вычисленное по этим расчетным формулам с подстановкой соответствующих значений максимальное время достоверного прогноза для системы Алтайский край — Сибирский округ: для темпа роста ВРП $t_r \cong 2{,}7 \cong 3$ года, для самого показателя $t_r \cong 2$ года. При этом ошибка вычисления t_r по показателю Ляпунова составляет 3 года (то есть $2 \le t_r \le 5$ лет) для темпа и 9 лет ($1 \le t_r \le 10$ лет) для самого показателя ВРП, что можно объяснить малым количеством точек ряда, по которому производился расчет. Точное прогнозирование состояний данной системы в будущем на интервалах времени, превышающих 5 лет невозможно.

10. Энтропия Колмогорова. Характерными признаками наличия хаоса в любой системе являются локальная неустойчивость и перемешивание ее фазовых траекторий, для которых вводится энтропия Колмогорова. Она является важнейшей характеристикой хаотического движения в фазовом пространстве любой размерности [8]. Благодаря ей можно определить характер поведения параметра порядка (хаотическое при $K_0 > 0$ и случайное при $K_0 \to \infty$), а также для временного ряда положительный показатель Ляпунова λ_p. Энтропию Колмогорова (K_0), которая показывает степень хаотичности системы, можно определить как величину, пропорциональную скорости потери информации о состоянии динамической системы с течением времени:

$$S(t) \underset{t\to\infty}{=} K_0 t,$$

где S — метрическая энтропия системы.

Энтропия Колмогорова K_0 является суммой положительных показателей Ляпунова. Для временных рядов, имеющих только один положительный показатель Ляпунова, $K_0 = \lambda_p$.

11. Сжатие фазового объема как характеристика состояния устойчивости. В консервативных системах фазовый объем со временем не меняется. В системах с хаосом происходит сжатие фазового объема до некоторого предельного значения. Для таких систем существует связь показателей Ляпунова с эволюцией фазового объема $V(t)$ через характерное время процесса изменения фазового объема τ_0:

$$\tau_0 = \frac{1}{\sum\limits_k \lambda_k}. \qquad (12)$$

Это означает, что характерный параметр τ_0, обратно пропорционален сумме всех показателей Ляпунова динамической системы. Для временного ряда, имеющего как минимум 3 показателя Ляпунова (положительный λ_p, нулевой $\lambda_0 \approx 0$ и отрицательный λ_n), выражение (12) можно записать следующим образом:

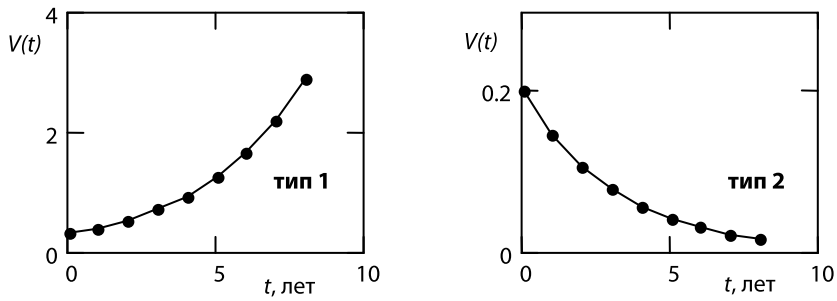
$$\tau_0 = \frac{1}{\lambda_p + \lambda_0 + \lambda_n}, \qquad (13)$$

тогда выражение для эволюции фазового объема:

$$V(t) = \mu_0 \cdot e^{\frac{t}{\tau_0}}, \qquad (14)$$

где μ_0 — начальный фазовый объем динамической системы. Для хаотических систем $\sum\limits_k \lambda_k < 0$, следовательно, характерный управляющий параметр $t_0 < 0$, фазовый объем при этом сжимается.

Если значение фазового объема стремится со временем к 0, то система стремится занять устойчивое состояние. Если возрастает и стремится к некоторой константе, то система



а *б*

Рис 11. *Эволюция фазового объема системы Алтайский край — Сибирский округ (а — для показателя ВРП по отношению к базовому периоду, б — для темпа роста ВРП)*

хаотическая и имеет несколько точек равновесия. Если фазовый объем увеличивается с течением времени, то процесс становится все более случайным.

В рассматриваемой системе Алтайский край — Сибирский округ определяются значения двух из трех показателей Ляпунова: положительного λ_p и отрицательного λ_n. Тогда эволюция фазового объема данной системы происходит так, как показано на рис. 11.

Данный рисунок показывает, что фазовый объем для темпа роста ВРП с течением времени уменьшается (рис. 11б), что говорит о наличии хаоса в системе и применимости методов изучения хаотических систем к изучению данного временного ряда. Также сжатие фазового объема говорит о наличии притягивающего множества (аттрактора) в системе. Наличие аттрактора можно определить и по фазовому портрету для темпа роста (рис. 4б). Следовательно, для данного аттрактора можно определить фрактальную размерность D и сделать вывод о сложности описываемой системы.

Эволюция фазового объема для самого показателя ВРП свидетельствует о случайности процессов, происходящих в системе, а также об отсутствии аттрактора. Поэтому и фрактальная размерность данного временного ряда близка к единице ($D \to 1$). С точки зрения хаотической динамики данная система имеет упрощенную фрактальную структуру.

В таблице представлены характеристики временного ряда показателя ВРП, выраженного в процентах по отношению к базовому периоду и предыдущему году.

12. Спектр пульсаций и характерные частоты. В нелинейной динамике при анализе хаотических процессов рассматривается зависимость

Таблица

Характеристики временного ряда ВРП для системы Алтайский край — Сибирский федеральный округ

Характеристики	ВРП, % к базовому периоду (к 1999 г.)	Темп роста ВРП, % к предыдущему году
Фрактальные характеристики		
Показатель Хёрста H	0,89±0,23	0,72±0,42
Фрактальная размерность D	1,11±0,29	1,28±0,75
Корреляционная функция C	0,724	0,361
Показатели Ляпунова		
λ_p, лет-1	1,57±1,24	1,01±0,47
λ_n, лет-1	–1,29±1,23	–1,32±1,99
Границы фазового объема		
μ_0, %	0,3	0,2
L, %	7,58	3,067
Время забывания начальных условий		
t_r, лет	2,058	2,715
t_r минимальное, лет	1,151	1,85
t_r максимальное, лет	9,723	5,1
Характерный временной параметр		
τ_0, лет	3,533	–3,184

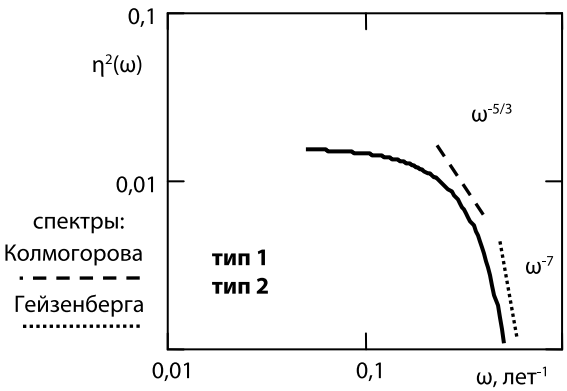


Рис 12. *Спектры пульсаций для темпа роста ВРП и для показателя ВРП системы Алтайский край — Сибирский округ*

квадрата амплитуды функции (мгновенной мощности) от частоты.

Если построить нелинейную кривую данной зависимости и провести ее сравнение с известными спектрами: спектром Колмогорова, спектром Гейзенберга и спектром вязких пульсаций, — при совпадении отдельных участков полученного спектра с перечисленными спектрами можно сделать вывод, во-первых, что спектр пульсаций является ограниченным по интервалу частот, во-вторых, отдельные его участки соответствуют указанным спектрам [16].

Таким образом, на основе фрактального подхода были разработаны алгоритмы расчета и программный продукт по определению фрактальных характеристик и хаотических свойств динамических систем на уровне региона по временным рядам, на основании которых осуществляется прогноз поведения экономической системы. Это принципиально новый метод прогнозирования, который требует дополнительных исследований. Отличительной же особенностью программного продукта является автоматический режим всех расчетов, за исключением определения показателей Ляпунова.

Список литературы

1. *Быстрай Г. П.* Термодинамика открытых систем : учеб. пособие. Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 2007. 120 с.

2. Валютные рынки. Математическое моделирование хаотических состояний : препринт / Быстрай Г. П., Николаева Е. В., Журкина А. В. Рыбалко А. А. Екатеринбург : УрО РАН, 2001. 61 с.

3. Величина прожиточного минимума // Федеральная служба государственной статистики. [Электронный ресурс]. URL: http://www.gks.ru/free_doc/new_site/population/urov/urov_41kv.htm. (дата обращения: 26.03.2010).

4. *Горелова В. Л., Мельникова Е. Н.* Основы прогнозирования систем : учеб. пособ. для инж.-экон. спец. вузов. М.: Высшая школа, 1986. 287 с.

5. Индикаторы, характеризующие экономические и социальные процессы в Алтайском крае : стат. бюл. / Территориальный орган Федеральной службы государственной статистики по Алтайскому краю. Барнаул, 2009. 110 с.

6. *Кондратьев Н. Д.* Большие циклы конъюнктуры и теория предвидения. Избранные труды / Международный фонд Н. Д. Кондратьева и др.; ред. колл.: Абалкин Л. И. (пред.) и др.; сост. Яковец Ю. В. М.: ЗАО «Издательство "Экономика"», 2002. 767 с.

7. *Коршунов Л. А., Быстрай Г. П.* Детерминированное непериодическое изменение валового регионального продукта // Экономика региона. №1. 2010. с. 196-201.

8. *Малинецкий Г. Г., Потапов А. Б.* Современные проблемы нелинейной динамики. М.: УРСС, 2002. 356 с.

9. Методические рекомендации и материалы по разработке прогноза научно-технологического и социально-экономического развития России до 2030 года // мат-лы секций Координационного совета Российской академии наук по прогнозированию. М.: ИНЭС, 2010. 542 с.

10. Методы народнохозяйственного прогнозирования / под ред. акад. Н. П. Федоренко, акад. А. И. Анчишкина, д.э.н. Ю. Я. Яременко. М.: Наука, 1985. 472 с.

11. Оборот розничной торговли в расчете на душу населения РФ // Федеральная служба государственной статистики. [Электронный ресурс]. URL: http://www.gks.ru/free_doc/new_site/business/torg/rozn/rozn25.xls. (дата обращения: 26.03.2010).

12. Социально-экономическое прогнозирование развития территориальных систем / под общей ред. чл-корр. РАН Татаркина А. И., чл.-корр. РАН Гизатуллина Х. Н. Екатеринбург: УрО РАН, 2001. 228 с.

13. *Трисеев Ю. П.* Долгосрочное прогнозирование экономических процессов. Системные методы. Киев : Наукова думка, 1987. 134 с.

14. Уровень безработици населения по субъекта Российской Федерации с 2000 г. // Федеральная служба государственной статистики. [Электронный ресурс]. URL: http://www.gks.ru/free_doc/new_site/population/trud/trud6.xls. (дата обращения: 25.03.2010)

15. *Федер Е.* Фракталы : пер. с англ. М. : Мир, 1991. 254 с.

16. *Хинце И. О.* Турбулентность. М.: Физматгиз, 1963. 300 с.

17. Центральная база статистических данных Федеральной службы государственной статистики. [Электронный ресурс]. URL: http://www.gks.ru/dbscripts/Cbsd/DBInet.cgi. (дата обращения: 26.03.2010).

18. *Шустер Г.* Детерминированный хаос. Введение. М.: Мир, 1988.

19. *Hurst H. E.* Long-term storage capacity of reservoirs // Transactions of the American Society of Civil Engineers. 1951. V. 116. p. 770-808.

20. *Hurst H. E., Black R. P., Simaika Y. M.* Long-term Storage. An Experimental Study. London: Constable, 1965.

21. *Mandelbrot B. B.* The Fractal Geometry of Nature. New York. 1982.