УДК 330.101.

ПОСТРОЕНИЕ ФУНКЦИИ КОЛЛЕКТИВНОГО ВЫБОРА ДЛЯ БЛИЗКИХ ЗАМЕНИТЕЛЕЙ

Л.А. Дедов, С.А. Тонких

Ключевые слова: коллективный выбор, близкие заменители, оценка предпочтительности

В статье рассматривается функция выбора, оценивающая его потенциал. При этом существенно важную роль играет возможность суммирования благ на основе их близкой взаимозаменяемости.

Известный результат теории общественного выбора, утверждающий невозможность в общем случае агрегации индивидуальных предпочтений в коллективной выбор [1; 2] не исключает частных случаев, когда специфика рыночной (или иной) структуры, в которой осуществляется выбор, конституирует характерную для нее коллективную оценку предпочтительности благ (или иных объектов).

В ряде случаев ситуация является также достаточно простой и легко формализуемой. Рынок близких субститутов относится к примерам подобного рода. Естественной целью на таком рынке может быть максимизация потенциала (возможностей) выбора.

Более конкретное перечисление подобных рыночных структур позволяет указать на одну их особенность, важную с точки зрения формализации выбора в таких системах. Так, типичными вариантами здесь могут быть рынки сотовых телефонов, наручных часов, плиточного шоколада, видов и сортов сыра, колбас, пива и т.п.

Характерной особенностью продукции на подобных рынках является то, что она, с одной стороны, достаточно однородна, чтобы ее суммировать в некотором однокачественном выражении (например, в штуках), а с другой стороны, достаточно дифференцирована и ее конкретные виды отличимы друг от друга.

Это и есть та специфическая черта описанных и им подобных рынков, которая позволяет указать на формализм построения для них одного из вариантов оценки коллективного выбора – меры его потенциала (или возможностей).

Далее отмеченный момент рассматривается более подробно, а также предлагается его распространение на более общие случаи.

Допускается, что количество благ i-го вида, подлежащее выбору и равное x_i, для начала целочисленное.

Общее количество благ составляет $\sum_{i=1}^{n} x_i$.

Введем в рассмотрение понятие канала распределения. Канал распределения – это совокупность общественных институтов, отношений и материальных условий, характеризующаяся относительной целостностью и автономностью и обеспечивающая продвижение благ от производителей к потребителям.

Канал распределения характеризуется пропускной способностью и описывается неравенством:

$$S_1 + S_2 + ... + S_n \le K,$$

где K – пропускная способность, S_i – количество выбираемого i-го блага.

Далее, каналов может быть много – l. Тогда имеем:

$$\begin{cases} S_{11} + S_{21} + ... + S_{n1} \le K_1; \\ . . . . . \\ S_{1l} + S_{2l} + ... + S_{nl} \le K_l. \end{cases} \quad (1)$$

Предполагается также, что система каналов минимально рациональна в следующем смысле:

а) каждый канал функционален, то есть

$$\sum_{i=1}^{n} S_{ij} > 0;$$

б) система каналов позволяет распределять между субъектами выбора состав благ $x = (x_1, x_2 ... x_n)$.

В силу сказанного схема выбора имеет вид:

$$\begin{cases} S_{11} + S_{21} + ... + S_{1l} = x_1; \\ . . . . . \\ S_{n1} + S_{2l} + ... + S_{nl} = x_n; \\ S_{11} + S_{21} + ... + S_{n1} \le K_1; \\ . . . . . \\ S_{1l} + S_{2l} + ... + S_{nl} \le K_l. \end{cases} \quad (2)$$

Число различных вариантов выбора равно количеству различных решений системы (2) при выполнении условий а) и б).

Для каждого отличного от других решения системы (2) организуем упорядочную запись:

$$(S_{11}, S_{21}, ..., S_{n1}, S_{12}, S_{22}, ..., S_{n2}, ..., S_{1l}, S_{2l}, ..., S_{nl}).$$

Величины S_{ij} являются так называемыми микровыборами для системы (2).

Введем понятие макровыбора и подсчитаем возможное число макровыборов. Для этого из последовательности микровыборов сначала отбрасываются такие S_{ij}, что $S_{ij} = 0$. Затем если в оставшейся последовательности есть компоненты с одинаковыми первыми индексами,

следующие друг за другом, то их необходимо сложить. Например, если за S_{31} следуют по предположению S_{32} и S_{34}, тогда заменяем их суммой $S_{31} + S_{32} + S_{34}$, характеризующей общий последовательный выбор потребителями благ третьего вида по каналам 1, 2 и 4. Такие преобразования производятся со всеми ненулевыми членами исходной последовательности. В результате получается то, что мы определяем как макровыбор потребителей.

Поскольку заранее нельзя считать ни один из допустимых макровыборов невозможным, то их общее число необходимо определить непосредственным подсчетом вариантов. Наличие каналов распределения необходимо считать существенной стороной схемы выбора. На практике недостаточное количество каналов означало бы невозможность осуществления некоторых вариантов распределения количеств x_i. Это привело бы к ограничениям выбора, таким как лимитирование, карточки, очереди и т.п., что нельзя считать экономической или социальной нормой. Вариантов выбора не больше, чем распределений количества из $\sum_{i=1}^{n} x_i$ единиц по величинам x_i.

Получаем оценку потенциала выбора:

$$W(x) = \frac{(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)!}{x_1! \cdot x_2! \cdot \ldots \cdot x_n!}. \tag{3}$$

Формула для $W(x)$ сложна в вычислительном отношении. Однако ее можно преобразовать к более обозримому виду, используя асимптотику Стирлинга $\ln t! \approx t \ln t - t$.

В этом случае получаем:

$$H(x) = \ln W(x) = \ln \frac{(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)!}{x_1! \cdot x_2! \ldots x_n!} =$$

$$= \ln \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)!}{\left(\prod_{i=1}^{n} (x_i!)\right)} \approx \sum_{i=1}^{n} x_i \ln \sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n} x_i - \tag{4}$$

$$- \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \ln x_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \right) = - \sum_{i=1}^{n} x_i \ln \frac{x_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i} \quad .$$

Далее следует отказаться от предположения о целочисленности величин x_i. Если становится возможным выражение величин x_i в неотрицательных действительных числах, данных в едином физическом (товароведческом) масштабе, то снимается проблема несовпадения «единиц спроса» и «единиц предложения» [см. 3]. Действительно, и те и другие будут допустимы для оценки выбора посредством одного и того же функционала.

Физический масштаб устанавливается при помощи постоянного коэффициента перевода единиц предложения в физические единицы. То же

самое можно сказать и о сопоставлении физических единиц и единиц спроса. Коэффициенты перевода в каждом из этих случаев могут быть различны, но это константы, равные в каждом варианте для всех видов благ. Последнее возможно ввиду высокой взаимозаменяемости типов продукции. В силу такой взаимозаменяемости все виды отраслевой продукции сначала переводятся, например, в общие единицы спроса, затем посредством соответствующих констант они переводятся в физические единицы. Аналогичная ситуация возникает и для единиц предложения.

Порядковые предпочтения наборов благ в единицах спроса, единицах предложения и физических единицах будут совпадать.

Осуществим переход к неотрицательным действительным значениям величин x_i.

Элементарный выбор v-м субъектом i-го блага в период t обозначается S_{itv}. Эти микровыборы агрегируются. Сначала получаем:

$$S_{it} = \sum_{v=1}^{m} S_{itv},$$

где m – число субъектов выбора. Количество моментов времени считается достаточным для осуществления всех возможных вариантов распределения благ (то есть в данном случае моменты времени выполняют роль каналов распределения).

При этом некоторые $S_{itv} = 0$. Затем S_{it} упорядочиваются во времени. Ясно, что в результате возникают различные распределения состава $x = (x_1, x_2 ... x_n)$.

Величины S_{itv} будем измерять действительными числами. Для обобщения схемы выбора, данной выше на область действительных чисел, воспользуемся следующим приемом. Выделим из состава $x = x^{(\infty)} = (x_1, x_2, ..., x_n) = \left(x_1^{(\infty)}, x_2^{(\infty)}, ..., x_n^{(\infty)}\right)$ рациональную часть $x^{(R)} = \left(x_1^{(R)}, x_2^{(R)}, ..., x_n^{(R)}\right)$. Для этого заменим каждое число $x_i = x_i^{(\infty)}$, являющееся по предложению действительным, на его рациональное приближение $x_i^{(R)}$ с R значащими цифрами в старших разрядах дробной части. Остальные цифры будут заменены нулями. Таким образом, в целом числе, например в 4 = 4,00000…, необходимо будет различать значащие и незначащие нули. Проблему можно упростить, считая, что 4,00000… = 3,99999… .

Для $x^{(R)}$ стандартным образом подсчитывается $W\left(10^R \cdot x^{(R)}\right)$. Функция W изменяется как экспонента масштаба, поэтому лучше перейти к

$$H\left(10^R \cdot x^{(R)}\right) = \ln W\left(10^R \cdot x^{(R)}\right) \approx -\sum_{i=1}^{n} 10^R \cdot x_i^{(R)} \ln \frac{x_i^{(R)}}{\sum_{i=1}^{n} x_i^{(R)}}.$$

Определим функцию $H^{(R)} = \dfrac{H\left(10^R \cdot x^{(R)}\right)}{10^R}$.

Имеем $H(x)=H^{(\infty)}(x)=\lim\limits_{R\to\infty}H^{(R)}=\lim\limits_{R\to\infty}\left(-\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^{(R)}\cdot\ln\dfrac{x_i^{(R)}}{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^{(R)}}\right)=$

$=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^{(\infty)}\cdot\ln\dfrac{x_i^{(\infty)}}{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^{(\infty)}}=-\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\cdot\ln\dfrac{x_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}.$

Соответственно $W(x)$ определяется как $\lim\limits_{R\to\infty}\left[W\left(10^R\cdot x^{(R)}\right)\right]^{\frac{1}{10^R}}$.

Покажем, что $H(x)=\ln W(x)$. Действительно, в асимптотике Стирлинга $\ln t!=t\ln t-t+\Delta$, при $t\to\infty$ величина $\dfrac{\Delta}{t}\to 0$. В нашем случае будет $\ln\left[W(10^R\cdot x^{(R)})\right]=H\left(10^R\cdot x^{(R)}\right)+\Delta^{(R)}$.

При этом $\dfrac{\Delta^{(R)}}{\sum\limits_{i=1}^{n}10^R\cdot x_i^{(R)}}\to 0$ при $\sum\limits_{i=1}^{n}10^R\cdot x_i^{(R)}\to\infty$. То есть фактически $\dfrac{\Delta^{(R)}}{10^R}\to 0$, поскольку $\sum\limits_{i-1}^{\infty}x_i^{(R)}\to\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^{(\infty)}=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i<\infty$. Но тогда получается

$\ln W(x)=\lim\limits_{R\to\infty}\ln W^{(R)}=\lim\limits_{R\to\infty}\ln\left[W\left(10^R\cdot x^{(R)}\right)\right]^{\frac{1}{10^R}}=\lim\limits_{R\to\infty}H^{(R)}=$

$=\lim\limits_{R\to\infty}\dfrac{H\left(10^R\cdot x^{(R)}\right)+\Delta^{(R)}}{10^R}=H(x).$

Итак, в конечном счете:

$$H(x)=-\sum_{i=1}^{n}x_i\ln\frac{x_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}=-\lambda\sum_{i=1}^{n}P_i\ln P_i,$$

где $\lambda=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i$, а $P_i=\dfrac{x_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}$.

Несложно показать, что $H(x)$ представляет собой возможный вариант функции полезности, в чем можно убедиться, исследуя свойства этого выражения. Рассмотрим данный момент более подробно.

Справедлива следующая цепочка формул:

$$H(x)=-\lambda\sum_{i=1}^{n}P_i\ln P_i=-\sum_{i=1}^{n}x_i\ln\frac{x_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}=\sum_{i=1}^{n}x_i\ln\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}{x_i}. \qquad (5)$$

Из последней формулы видно, что $H(x)\geq 0$, поскольку $x_i \geq 0$ и $\ln\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{x_i} \geq 0$.

Кроме того, $H(tx)=t\cdot H(x)$ для $t>0$, то есть $H(x)$ – это линейно-однородная функция (функция положительно однородная первой степени). Но тогда в силу известной теоремы Эйлера об однородных функциях имеем

$$H(x)=\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \frac{\partial H(x)}{\partial x_i}. \qquad (6)$$

Сравнивая выражения для H в (5) и (6), приходим к выводу, что

$$V_i(x)=\frac{\partial H(x)}{\partial x_i}=\ln\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{x_i}.$$

Кроме того, $V_i \geq 0$ на R_+^n.

В силу неотрицательности на R_+^n величин V_i функция $H(x)$ не убывает по неотрицательным направлениям. Будем говорить в этом случае, что $H(x)$ – неубывающая функция.

Легко видеть, что $H(x)$ – дважды непрерывно дифференцируемая на R_+^n функция. Это вытекает из непрерывности и непрерывной дифференцируемости величин $V_i(x)$. Так, при $j \neq i$ $\frac{\partial V_i(x)}{\partial x_j}=\frac{1}{\lambda}$, а при $i=j$ $\frac{\partial V_i(x)}{\partial x_i}=-\frac{\lambda^{(i)}}{\lambda}$, где $\lambda^{(i)}=\sum_{\varepsilon\neq i} x_\varepsilon$.

Докажем, что H – вогнутая функция. Известно, что для вогнутых функций должно выполнятся неравенство:

$$f(x)-f(y)\leq \nabla f(y)(x-y). \qquad (7)$$

И наоборот, если (7) выполняется, то функция f является вогнутой.

Принимая $f=H$, имеем

$$H(x)-H(y)-\nabla H(y)(x-y)=-\sum_{i=1}^{n} x_i \ln\frac{x_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i}+$$

$$+\sum_{i=1}^{n} y_i \ln\frac{y_i}{\sum_{i=1}^{n} y_i}+\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)\ln\frac{y_i}{\sum_{i=1}^{n} y_i}=-\sum_{i=1}^{n} x_i \ln\frac{x_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i}+$$

$$+\sum_{i=1}^{n} x_i \ln\frac{y_i}{\sum_{i=1}^{n} y_i}=-\lambda\sum_{i=1}^{n} P_i \ln P_i+\lambda\sum_{i=1}^{n} P_i \ln\tau_i=\lambda\sum_{i=1}^{n} P_i \ln\frac{\tau_i}{P_i}.$$

Здесь $P_i = \dfrac{x_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i}$, а $\tau_i = \dfrac{y_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} y_i}$. Покажем, что $-\sum\limits_{i=1}^{n} P_i \ln \dfrac{\tau_i}{P_i} \geq 0$.

Имеем $\dfrac{\tau_i}{P_i} = 1 + \dfrac{\tau_i - P_i}{P_i} = 1 + Z_i$, где $Z_i = \dfrac{\tau_i - P_i}{P_i}$.

Известно, что $\ln(1+Z) \leq Z$. Но в этом случае будет

$$\sum_{i=1}^{n} P_i \ln \frac{\tau_i}{P_i} = \sum_{i=1}^{n} P_i \ln\left(1 + \frac{\tau_i - P_i}{P_i}\right) \leq \sum_{i=1}^{n} P_i \left(\frac{\tau_i - P_i}{P_i}\right) = \sum_{i=1}^{n} (\tau_i - P_i) = \sum_{i=1}^{n} \tau_i - \sum_{i=1}^{n} P_i = 0,$$

поскольку $\sum\limits_{i=1}^{n} \tau_i = 1$ и $\sum\limits_{i=1}^{n} P_i = 1$. Следовательно, $-\lambda \sum\limits_{i=1}^{n} P_i \ln \dfrac{\tau_i}{P_i} \geq 0$. Значит, $H(x) - H(y) - \nabla H(y)(x - y) \leq 0$. Но тогда $\nabla H(y)(x - y) \geq H(x) - H(y)$, что и требовалось доказать. Следовательно, $H(x)$ – вогнутая функция.

Таким образом, установлено, что $H(x)$ – это дважды непрерывно дифференцируемая, линейно однородная, неубывающая, неотрицательная, вогнутая на R_+^n функция. В таком своем качестве эта функция удовлетворяет самой сильной аксиоматике для кардиналистской функции полезности [см. 4, с. 339-359; 5, с. 180].

Далее мы попытаемся избавиться от предпосылки о непосредственной суммируемости выбираемых благ.

Заметим, что экономическая система часто описывается с помощью неравенств и уравнений, как правило, линейных или выпуклых. В случае выпуклости возможна достаточно приемлемая кусочно-линейная аппроксимация.

Допустимое множество состояний системы в этом случае представимо в виде выпуклого многогранного множества – политопа или полиэдра в соответствующем предметном пространстве. В дальнейшем предполагается вариант политопа (многогранника).

Любая точка y из этого многогранника N может быть представлена в виде:

$$y = \sum_{\varepsilon=1}^{m} P_\varepsilon \cdot a^\varepsilon \ , \tag{8}$$

где a^ε – ε-я вершина многогранника;

P_ε – так называемая барицентрическая координата под номером ε.

Если точка y не лежит в многограннике допустимых состояний ХС, но имеется такое λ, что λN э y, то можно записать:

$$y = \lambda \sum_{\varepsilon=1}^{m} P \cdot a^\varepsilon . \tag{9}$$

Барицентрические координаты P_ε суммируемы и удовлетворяют условию $\sum_{\varepsilon=1}^{m} P_\varepsilon = 1;\ P_\varepsilon \geq 0;\ \varepsilon = 1 \div m$.

Если задать y системой таких координат P_ε и коэффициентом λ, а затем определить x_ε как $\lambda \cdot P_\varepsilon$, то получим представление благ y в виде набора $x = (x_1, ..., x_m)$, где координаты x_ε допускают суммирование и сопоставленные по их величинам. В частности

$$\sum_{\varepsilon=1}^{m} x_\varepsilon = \sum_{\varepsilon=1}^{m} \lambda \cdot P_\varepsilon = \lambda \sum_{\varepsilon=1}^{m} P_\varepsilon = \lambda$$

и

$$\frac{x_\varepsilon}{\sum_{\varepsilon=1}^{m} x_\varepsilon} = \frac{\lambda \cdot P_\varepsilon}{\sum_{\varepsilon=1}^{m} \lambda \cdot P_\varepsilon} = P_\varepsilon .$$

Недостаток описанного подхода состоит в том, что в общем случае набор барицентрических координат является не единственным. Может быть не единственным и значение λ. Далее рассматривается случай, когда эти величины заданы однозначно.

Возьмем за a^ε вектор-столбец

$$a^\varepsilon = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \dfrac{A_\varepsilon}{K_\varepsilon^+} \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Длина (количество координат) в a^ε ровна n, на ε-м месте стоит величина $\dfrac{A_\varepsilon}{K_\varepsilon^+}$.

При этом A_ε – некоторое нормативное значение величины блага ε, а K_ε^+ – количество единиц измеряющей шкалы, на которое распределяется A_ε, то есть $\dfrac{A_\varepsilon}{K_\varepsilon^+}$ – это количество благ ε, приходящееся на одно деление шкалы измерения. Когда безразмерная величина K_ε^+ численно равна A_ε, получаем обычную физическую (товароведческую) шкалу по координате ε. В качестве величин A_ε можно, к примеру, выбрать компоненты нормированного

направляющего вектора магистрального луча в соответствующей модели экономической динамики. Можно также в качестве A_ε выбрать некоторые нормативные или базовые значения. Также можно положить, что $K_1^+ = K_2^+ = ...K_n^+$. Последнее, однако, необязательно.

Тогда можно записать

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \lambda \left\{ P_1 \begin{bmatrix} \frac{A_1}{K_1^+} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + P_2 \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{A_2}{K_2^+} \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + ... + P_n \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \frac{A_n}{K_n^+} \end{bmatrix} \right\}. \quad (10)$$

$\sum_{\varepsilon=1}^{n} P_\varepsilon = 1.$

Отсюда,

$$y_\varepsilon = \lambda P_\varepsilon \frac{A_\varepsilon}{K_\varepsilon^+}. \quad (11)$$

Ранее установлено, что $x_\varepsilon = \lambda P_\varepsilon$, следовательно, $y_\varepsilon = x_\varepsilon \cdot \frac{A_\varepsilon}{K_\varepsilon^+}$. Тогда

$$x_\varepsilon = \frac{y_\varepsilon}{A_\varepsilon} \cdot K_\varepsilon^+. \quad (12)$$

Кроме того, $\lambda = \sum_{\varepsilon=1}^{n} x_\varepsilon$ и $P_\varepsilon = \frac{x_\varepsilon}{\sum_{\varepsilon=1}^{n} x_\varepsilon}$.

Формализм построения оценки потенциала выбора теперь может быть распространен на случай непосредственной неаддитивности исходных количеств учитываемых благ y_ε.

При этом надо подчеркнуть, что ставится задача оценки потенциала выбора именно посредством аддитивных переменных x_ε, а не исходных физических мер y_ε. Возможность этого в каждом конкретном случае должна рассматриваться специально.

Заметим, что приведенный подход обобщает результаты, полученные в [3; 6; 7].

Необходимо также сделать несколько пояснений относительно построенной выше оценки возможностей выбора. Поскольку она оценивает потенциал выбора для близких заменителей, тем не менее отличающихся настолько, что они имеют разное значение для разных групп потребителей, то естественной рыночной структурой, на которой применимы подобные функционалы, будет рынок монополистической конкуренции.

Кроме того, оценка $H(x)$ скорее предназначена для лиц, принимающих решения на стороне предложения, поскольку именно предложение здесь создает потенциал возможного выбора, и как раз это свойство обеспечивает ему успех.

Список литературы

1. Arrow K.J. Social Choice and Individual Values. – N.Y.: Wiley, 1951.

2. Тангян А.С. Коллективного выбора теория // Экономико-математический энциклопедический словарь. – М.: ИНФРА-М, 2003. – С. 210-213.

3. Аукуционек С.П., Жукова Н.В. Модель формирования структуры потребления на микроуровне («термодинамический подход»). // Экономика и математические методы. – 1989. Том XXV. – Вып. 5. – С. 853-861.

4. Грасса, Дж. Ла. Микроэкономика. Субъективистский подход в экономике // Пезенти А. Очерки политической экономии капитализма. Т. 2. – М.: Прогресс, 1976.

5. Ицкович И.А. Анализ целевой функции потребления // Теоретические народно-хозяйственные модели / Под ред. К.К. Вальтуха. – Новосибирск: Наука, 1980.

6. Вильсон А. Дж. Энтропийные методы моделирования сложных систем. – М.: Наука, 1978.

7. Дедов Л.А., Калашникова Г.Н. Решающее правило субоптимальной динамики региональной телекоммуникационной системы. // Вестник Ижевского государственного технического университета. – Ижевск. Изд-во ИжГТУ. – 2002. – № 4. – С. 47-50.