УДК 519.865

ПОСТРОЕНИЕ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ С ПЕРЕМЕННОЙ ЭЛАСТИЧНОСТЬЮ ЗАМЕЩЕНИЯ[1]

А.Г. Львов
Ульяновский государственный университет

Ключевые слова: Производственные функции, однородные функции, переменная эластичность замещения

Приводятся алгоритм и результаты тестовых вычислений эластичностей замещения для нового класса положительно однородных вогнутых производственных функций. Такой класс определен через преобразование гомотетии произвольных положительных вогнутых функций, определенных на стандартном симплексе. Показывается, что эластичность замещения таких функций в общем случае переменная.

1. Производственные функции (ПФ) являются базовым элементом математического аппарата моделирования производственных объектов и систем на различных уровнях – от крупного предприятия (фирмы), до национальных экономик. ПФ, адекватная производственному объекту, позволяет выполнить глубокий количественный экономический анализ: расчитывать предельные производительности факторов (ресурсов) и факторные эластичности, строить функции факторного спроса и предложения продукта, функции прибыли и издержек, исследовать свойства замещения факторов [6, 10, 13]. За десятилетия развития метода ПФ определился набор стандартных ПФ – двухфакторных и многофакторных, обладающих известными свойствами: Кобба-Дугласа, постоянной эластичности замещения (CES), Солоу и др. На основе простых по структуре функций методом суперпозиции строятся более сложные [6].

Одним из основных понятий теории производства является *замещение факторов*. Количественные меры замещения были впервые введены Дж. Хиксом [8, 9] для двухфакторных функций как *предельная норма замещения* (ПНЗ) и *эластичность замещения*, позже обобщенные на случай любого количества факторов [6]. Эти характеристики наиболее полно исследуются в случае положительной однородности вогнутых ПФ, когда они являются функциями от пропорций соответствующих пар факторов. Напомним, что функция $f(x)$ называется положительно однородной функцией степени $\mu > 0$, если для любого вектора x

[1] Исследование поддерживается АВЦП Минобрнауки "Развитие научного потенциала высшей школы (2009-2010)", проект 2.1.3/6763.

выполняется свойство $f(tx) = t^{\mu} f(x), \forall t > 0$. В случае $\mu = 1$ функции $f(x)$ называются линейно – однородными.

Статистический анализ производства показывает, что эластичность замещения факторов не является постоянной. Аналитическое описание класса однородных функций с переменной эластичностью замещения для двух факторов было найдено впервые для частного случая линейной зависимости эластичности замещения от пропорции факторов Н. Реванкаром [11], и в общем (двухфакторном) случае – Р. Сато и Р. Гофманом [12]. Отметим, что в представлении Сато-Гофмана требуется задавать зависимость эластичности замещения, что затрудняет построение ПФ для реальных объектов. Эта проблема также привлекала внимание советских исследователей [7], но для функций с числом факторов более двух аналитическое представление ПФ с переменной эластичностью замещения оставалось ненайденным**.**

В.К. Горбуновым в [1] предложено аналитическое представление класса положительно однородных вогнутых функций произвольной размерности через вогнутые функции, заданные на стандартном симплексе. Эластичность замещения для таких функций, используемых в качестве производственных, является в общем случае переменной [3]. Она является не определяющей, а вычисляемой характеристикой для каждой функции. В данной работе это представление используется для построения многофакторных ПФ с переменной эластичностью замещения.

2. Рассмотрим однородную *n* – факторную ПФ $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ степени μ. *ПНЗ фактора* x_i *фактором* x_j *в окрестности точки* $x^0 = (x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$ *называется величина*

$$S_{ij}(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} : \frac{\partial f(x)}{\partial x_j}, \qquad (1)$$

приближенно показывающая, на сколько нужно увеличить фактор x_j*, чтобы компенсировать уменьшение фактора* x_i *на единицу при условии, что остальные факторы и выпуск продукции остаются неизменными* [10]. В однородном случае ПНЗ (1) зависит от пропорций использования факторов $\xi_{ji} = x_j / x_i, i \neq j$ [3, 5]:

$$f(x) = x_i^{\mu} f\left(\frac{x_1}{x_i}, \ldots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, 1, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \ldots, \frac{x_n}{x_i}\right), \ \phi(\xi^i) = f(\xi_{1i}, \ldots, \xi_{i-1,i}, 1, \xi_{i+1,i}, \ldots, \xi_{ni}),$$

$$S_{ij}(\xi^i) = \frac{\mu\phi(\xi^i) - \langle \xi^i, \phi'(\xi^i) \rangle}{\partial\phi(\xi^i)/\partial\xi_{ji}} \equiv \psi_{ij}(\xi^i).$$

Таким образом, для любого *i* мы имеем систему из $(n-1)$ уравнения

$$S_{ij} = \psi_{ij}(\xi^i), \ j = \overline{1,n} \wedge j \neq i, \qquad (2)$$

относительно $(n-1)$ переменных $\xi^i = (\xi_{1i}, \ldots, \xi_{i-1,i}, \xi_{i+1,i}, \ldots, \xi_{ni})$.

Эластичностью замещения фактора x_i фактором x_j в окрестности точки $x^0 = (x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$, называется величина

$$\sigma_{ij}(\xi^i) = \frac{S_{ij}}{\xi_{ji}} \frac{\partial \xi_{ji}}{\partial S_{ij}} = \frac{\partial \ln \xi_{ji}}{\partial \ln S_{ij}}, \qquad (3)$$

приближенно показывающая, на сколько процентов должно измениться отношение факторов x_j / x_i, при изменении ПНЗ S_{ij} на 1% [13]. Для двухфакторного случая $\sigma_{12} = \sigma_{21}$. В многофакторном случае свойство симметричности не выполняется [6]. Эластичность замещения (3) является эластичностью скалярной функции $\xi_{ji}(S_{i1}, ..., S_{i-1,i}, S_{i+1,i}, ..., S_{in})$, определяемой вместе со всеми компонентами вектора ξ^i как обратная (векторная) функция $(\psi_{ij})^{-1}(\cdot)$ системой (2), относительно S_{ij}. Для вычислений (3) требуются только частные производные $\partial \xi_{ji} / \partial S_{ij}$ этой функции. Эти производные определяются системой линейных *уравнений в вариациях*, получаемой дифференцированием по S_{ij} системы (2), где $\xi_{ji} = \xi_{ji}(S_{i1}, ..., S_{i-1,i}, S_{i+1,i}, ..., S_{in})$:

$$\sum_{r \neq i} \frac{\partial \psi_{ij}(\xi^i)}{\partial \xi_{ri}} \cdot \frac{\partial \xi_{ri}}{\partial S_{ik}} = \begin{cases} 1, & k = j, \\ 0, & k \neq j, \end{cases} \quad j = \overline{1,n} \wedge j \neq i. \qquad (4)$$

Формулы (2), (3), (4) позволяют вычислять эластичности замещения для любого числа факторов, которые в общем случае являются переменными [3]. Легко убедиться, что для двух факторов решением системы (4) будет

$$\frac{\partial \xi_{ji}}{\partial S_{ij}} = \frac{1}{\partial \psi_{ij}(\xi_{ji}) / \partial \xi_{ji}},$$

а в случае трех факторов

$$\frac{\partial \xi_{ji}}{\partial S_{ij}} = \frac{\partial \psi_{it}(\xi^i)}{\partial \xi_{ti}} : \left[\frac{\partial \psi_{ij}(\xi^i)}{\partial \xi_{ji}} \frac{\partial \psi_{it}(\xi^i)}{\partial \xi_{ti}} - \frac{\partial \psi_{ij}(\xi^i)}{\partial \xi_{ti}} \frac{\partial \psi_{it}(\xi^i)}{\partial \xi_{ji}} \right], \quad t \neq i, j. \qquad (5)$$

Приведём представление Горбунова положительно однородных неотрицательных вогнутых функций, определённых на неотрицательном ортанте R_+^n, через произвольные неотрицательные вогнутые функции, определённые на стандартном симплексе $S_n = \{x \geq 0 : \langle x \rangle = 1\}$. Здесь и далее используется обозначение $\langle x \rangle = \sum_{i=1}^n x_i$.

Теорема [1, 2]. *Любая неотрицательная, вогнутая, положительно однородная степени* $\mu > 0$ *на ортанте* R^n_+ *функция* $f(x)$ *может быть представлена в виде*

$$f(x) = \langle x \rangle^{\mu} \upsilon\left(x / \langle x \rangle\right), \tag{6}$$

где $\upsilon(y)$, $y \in R^n_+$ *- некоторая вогнутая и неотрицательная на симплексе* S_n *функция.*

Представление (6) расширяет возможности моделирования производственных объектов. Ниже данное представление используется для подкласса, порождаемого вогнутыми квадратичными функциями

$$\upsilon(x) = \alpha + \langle c, x \rangle + \langle Qx, x \rangle \tag{7}$$

с отрицательно определёнными матрицами $Q = \{q_{ij}\}$.

3. Вычислительный эксперимент. Приводимые ниже аналитические формулы вычисления эластичностей замещения получены с помощью символьных вычислений программной системой "Mathematica".

Рассмотрим трехфакторную линейно-однородную ПФ (6), порождаемую квадратичной функцией (7) с параметрами

$$\alpha = 5, \quad c = (7, 4, 3), \quad Q = \begin{pmatrix} -5 & 2 & -3 \\ 2 & -6 & 2 \\ -3 & 2 & -6 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно убедиться, что матрица Q отрицательно определённая и порождающая функция $\upsilon(x)$ строго вогнутая. Соответственно,

$$f(x) = \frac{7x_1^2 + 25x_1x_2 + 3x_2^2 + 14x_1x_3 + 21x_2x_3 + 2x_3^2}{x_1 + x_2 + x_3}.$$

Значения эластичностей замещения (3) в окрестностях произвольных точек $x^0 = (x_1^0, x_2^0, x_3^0)$, соответствующих уровню затрат факторов для производства объема продукции $f(x^0)$, вычисляются с использованием формул (2), (5). Соответствующие выкладки достаточно громоздки и мы их опускаем. Результаты вычислений представлены в таблице.

Таблица. Значения эластичностей замещения $\sigma_{ij}(\xi^i)$

$\sigma_{ij}(\xi^i) \setminus (x_1^0, x_2^0, x_3^0)$	(3, 2, 1)	(6, 5, 4)	(9, 8, 7)
$\sigma_{12}(\xi_{21}, \xi_{31})$	1,51	1,76	1,84
$\sigma_{13}(\xi_{21}, \xi_{31})$	5,21	3,79	3,65
$\sigma_{21}(\xi_{12}, \xi_{32})$	2,41	2,89	3,06

$\sigma_{23}(\xi_{12},\xi_{32})$	4,32	2,65	2,43
$\sigma_{31}(\xi_{13},\xi_{23})$	5,71	4,72	4,70
$\sigma_{32}(\xi_{13},\xi_{23})$	1,02	0,82	0,79

Таким образом, эластичности замещения для данной однородной ПФ различны как в зависимости от пропорций использования факторов для каждой их пары, так и для различных пар факторов. Новый параметрический класс положительно однородных ПФ с переменной эластичностью замещения достаточно богат и более адекватен для моделирования производственных объектов по сравнению с традиционными ПФ с постоянной эластичностью замещения. Он определяется аналитическим представлением (6), где в качестве порождающих функций можно выбирать произвольные вогнутые и положительные на симплексе S_n функции. Опыт построения таких функций для реальных объектов классическим методом наименьших квадратов представлен в [4, 5].

Автор благодарит научного руководителя В.К. Горбунова за внимание и помощь в работе.

Список литературы:

1. Горбунов В.К. *О представлении линейно однородных функций полезности* // Ученые записки УлГУ. Сер. "Фунд. пробл. матем. и механики". Вып. 1(6), Ульяновск: УлГУ, 1999.
2. Горбунов В.К. *Математическая модель потребительского спроса: Теория и прикладной потенциал*. – М.: Экономика, 2004. – 174 с.
3. Горбунов В.К. Ледовских А.Г. *Производственные функции многих переменных с переменной эластичностью замещения* // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование: Специальный выпуск. Иркутск: ИрГУПС. 2008. С. 134–138.
4. Горбунов В.К. Львов А.Г. *Построение двухфакторных производственных функций с постоянной и переменной эластичностью замещения* // Информационно-математические технологии в экономике, технике и образовании. Вып. 5: Прикладные аспекты информационно-аналитического моделирования и обработки информации. Екатеринбург: УГТУ – УПИ, 2009. 180 с.
5. Горбунов В.К. Львов А.Г. *Построение трёхфакторной производственной функции с переменными эластичностями замещения* // Труды Средневолжского математического общества. 2009. № 1. Т. 11.
6. Клейнер Г.Б. *Производственные функции: Теория, методы, применение. М.: Финансы и статистика*. 1986. 239 с.
7. Клейнер Г.Б., Сирота Б.Н. *О производственных функциях с постоянными и переменными эластичностями замены факторов* // Экономика и математические методы. 1975. Т. XI. Вып.3. С. 475–482.

8. Hicks J. *The Theory of Wages*. 1932. London: Macmillan.
9. Hicks J. *Value and Capital: An inquiry into some fundamental principles of economic theory*. 1939. Oxford: Clarendon Press.
10. Mas-Colell A., Whinston M., Green J. *Microeconomic Theory*. New York: Oxford Univ. Press, 1995. 981 p.
11. Revankar N.S. *A Class of Variable Elasticity of Substitution Production Functions* // Econometrica. 1971. Vol. 39. No1. P. 61-71.
12. Sato R., Hoffman R.F. *Production Functions with Variable Elasticity of Factor Substitution: Some Analysis and Testing* // The Review of Economics and Statistics.1968. Vol. 50. No. 4. P. 453-460.
13. Varian H. *Microeconomic Analysis*. 3rd edition. 1992. W.W. Norton & Company, Inc. New York.