ОПЫТ ПРИМЕНЕНИЯ КВАЗИИНВАРИАНТНЫХ ИНДЕКСОВ ПОТРЕБЛЕНИЯ[1]

Л.А. Козлова,
Ульяновский государственный университет

1. Используемые в экономико-статистической практике индексы количеств и цен потребления относятся к классу бинарных статистических, рассчитываемых по двум парам многомерных наборов (векторов) "цены-количества", соответствующих индексируемым периодам динамики некоторого рынка продуктов (благ) конечного потребления. Эти многочисленные методы представляют субъективизм исследователей и политиков, но игнорируют субъективизм и рациональность потребителей, приспосабливающихся к меняющейся конъюнктуре в соответствии со своими предпочтениями. В условиях экономической нестабильности они дают неприемлемо большие расхождения[2].

Первым шагом построения индексов потребления, учитывающих рациональность потребителей, была работа А.А.Конюса[3] 1924 года. В ней был предложен "истинный индекс стоимости жизни" (ИСЖ), как отношение стоимостей двух наборов товаров - реального, потреблённого в базовый период при соответствующих ценах, и виртуального, обеспечивающего в новых ценах базовый уровень потребления. При этом уровень потребления измеряется значением функции полезности, представляющей систему предпочтений потребителей. Идея Конюса получила развитие во многих зарубежных работах[4] и привела к созданию нового направления индексологии - теории "экономических" или "аналитических" индексов потребительского спроса. Несмотря на очевидную прогрессивность этой идеи, аналитические индексы до настоящего времени не вошли в полной мере в статистическую практику и спорадически появляются как объект исследования в отдельных научных публикациях.

Аналитические индексы определяются через функцию потребительских расходов, представляющую значение задачи минимизации расходов для достижения заданного уровня потребления. Эта задача достаточно сложная и до настоящего времени методы её эффективного решения раз-

[1] Исследование выполнено при финансовой поддержке РГНФ, проект № 07-02-21202 а/В, и целевой программой Минобразования РФ «Развитие научного потенциала высшей школы (2009-2010 годы), проект 2.1.3/6763 «Развитие математических моделей и анализ рыночного спроса и производства».

[2] *Зоркальцев В.И.* Индексы цен и инфляционные процессы. Новосибирск: Наука, 1996; *Айзенберг Н.И.* Сравнительный анализ методов расчёта индексов цен. Автореф. канд. экон. наук. ИСЭ СО РАН, Иркутск, 2000.

[3] *Конюс А.А.* Проблема истинного индекса стоимости жизни. – Экономика и мат. методы. Т.27. 1989. №3. С.435-444 (1924, переиздание).

[4] *Samuelson P.A., Swamy S.* Invariant economic index numbers and canonical duality: survey and synthesis // The American Economic Review. 1974, 64, 566-593.

виты только для случая однородных предпочтений[1]. В этом случае аналитические индексы удовлетворяют всем тестам Фишера и называются «инвариантными индексами» (*Samuelson and Swamy, 1974*). Основной интерес представляют три теста – транзитивности, мультипликативности и промежуточности (*Зоркальцев, 1996*). Инвариантные индексы относительно легко строятся в рамках «непараметрического метода»[2] решения обратной задачи классической теории потребительского спроса (ПС)[3]. Эта задача заключается в построении функции полезности, порождающей функции спроса, которые соответствуют наблюдаемому на данном рынке статистическому спросу. При этом достаточно решить систему линейных «неравенств Африата», определяющую значения функции полезности и множителя Лагранжа для задач рационального выбора, соответствующих всем статистическим ценам и расходам. Эти значения, называемые «числами Африата», определяют инвариантные индексы.

Реальные предпочтения потребителей для произвольных групп товаров, неоднородны. В этом случае соответствующая (специальная) система Африата будет несовместной и инвариантные индексы не существуют. В книге (*Горбунов, 2004*) для общего случая классических предпочтений (непрерывных, полных и транзитивных) введено понятие «квазиинвариантных индексов», вычисляемых, как и инвариантные индексы, по числам Африата соответствующей (общей) системы неравенств. Эти индексы удовлетворяют основным тестам мультипликативности и транзитивности, но в общем случае они не удовлетворяют тесту промежуточности. Однако отсутствие теоретического обоснования не означает неизбежную невыполнимость свойства промежуточности для квазиинвариантных индексов, определённых для существенно более широкого множества возможных торговых статистик, чем инвариантные индексы. Первые опыты расчёта квазиинвариантных индексов для реальных данных[4] подтверждают эту надежду и демонстрируют преимущества новых индексов относительно традиционных статистических. Данная работа представляет сущность и метод построения квазиинвариантных индексов, а также новый опыт их применения.

---

[1] Потребительские предпочтения называются однородными, если спрос на различные продукты пропорционален суммарным расходам.

[2] *Afriat S.N.* The construction of utility functions from expenditure data // International Economic Review. 1967, 8, 67-77; *Varian H.* Non-parametric tests of consumer behaviour // The Review of Economic Studies. 1983, 50**,** 99-110.

[3] *Горбунов В.К.* Математическая модель потребительского спроса: Теория и прикладной потенциал. – М.: Экономика, 2004; *Горбунов В.К.* К проблеме агрегирования потребительского спроса // Журнал экономической теории, 2009 (в печати).

[4] *Горбунов В.К., Козлова Л.А.* Построение и исследование квазиинвариантных индексов потребления // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. №3 (19) – Иркутск: ИрГУПС, 2008 (в печати).

2. Рассмотрим обратную задачу для классической модели рационального потребительского выбора

$$u(x(p,e)) = max\{u(x) : \langle p,x\rangle \le e,\ x \ge 0\}. \qquad (1)$$

Здесь $u(x)$ – ординальная функция полезности, определенная в пространстве n товаров R_+^n, $p > 0$ – вектор цен, e – расходы покупателей данного рынка товаров, $\langle p,x\rangle$ – скалярное произведение, представляющее стоимость планируемых покупок x, $x(p,e)$ – потребительский выбор. Пусть некоторый рынок представлен торговой статистической $\{p^t,\ x^t : t = \overline{0,T}\}$, где t обозначает моменты наблюдений в отчётный период от $t = 0$ до $t = T$, p^t – цены и x^t – количества продаж. Статистика представляет совокупные потребительские расходы $e_t = \langle p^t, x^t \rangle$. Обратная задача для (1) заключается в построении функции $u(x)$, рационализирующей данные $\{p^t,\ x^t\}$, т.е. $u(x^t) = max\{u(x) : \langle p^t, x^t \rangle \le e_t,\ x \ge 0\}$.

Введём перекрестные стоимости $e_{ts} =< p^t, x^s >$, коэффициенты $a_{ts} = e_{ts} - e_t$, и числа Африата $u_t = u(x^t)$, $\lambda_t = \lambda(p^t, x^t)$, где $\lambda(p,x)$ – множитель Лагранжа задачи (1). Согласно теореме Африата (*Afriat, 1967; Горбунов, 2004*) существование непрерывной, монотонной, ненасыщаемой и вогнутой функции полезности, рационализирующей эти данные, эквивалентно положительной разрешимости системы линейных неравенств

$$u_s - u_t - \lambda_t a_{ts} \le 0, \quad s,t = \overline{0,T},\ s \ne t. \qquad (2)$$

Для обеспечения положительности решения данной системы накладываются условия на две её компоненты решения: $\lambda_0 = 1$, $u_0 = e_0$. В случае однородных предпочтений выполняются равенства $u_t = \lambda_t e_t$, и система (2) распадается на две эквивалентные «специальные» системы, определяющие, соответственно, числа $\{u_t\}$ и $\{\lambda_t\}$. Первая из них – *u-система:* $e_t u_s \le e_{ts} u_t$, $s,t = \overline{0,T}$, вторая – *λ-система* $\lambda_s e_s \le \lambda_t e_{ts}$, $s,t = \overline{0,T}$. В случае разрешимости специальных систем определяются *инвариантные индексы* цен и количеств

$$P_{st} = \frac{\lambda_s}{\lambda_t}, \quad Q_{st} = \frac{u_t}{u_s}. \qquad (3)$$

Выше отмечено, что эти индексы удовлетворяют всем тестам Фишера, из которых наиболее важные:

- транзитивность, т.е. $P_{rs}P_{st} = P_{rt}$, $Q_{rs}Q_{st} = Q_{rt}$;

- мультипликативность, т.е. $P_{st}Q_{st} = P_{st}Q_{st} = e_t / e_s$;
- промежуточность, т.е. $P_{st}^- \le P_{st} \le P_{st}^+$, $Q_{st}^- \le Q_{st} \le Q_{st}^+$,

где $P_{st}^- = min_i(p_i^t / p_i^s)$, $P_{st}^+ = max_i(p_i^t / p_i^s)$, $Q_{st}^- = min_i(x_i^t / x_i^s)$, $Q_{st}^+ = max_i(x_i^t / x_i^s)$.

Квазиинвариантные индексы введены (*Горбунов, 2004*) как обобщение инвариантных индексов на общий неоднородный случай: $\hat{P}_{st} = e_t u_s / e_s u_t$, $\hat{Q}_{st} = \lambda_t e_t / \lambda_s e_s$. Такие индексы транзитивны. Пары индексов $\{\hat{P}_{st}, Q_{st}\}$ и $\{P_{st}, \hat{Q}_{st}\}$ взаимно мультипликативны, т.е. $\hat{P}_{st}Q_{st} = P_{st}\hat{Q}_{st} = e_t / e_s$. Поведение этих индексов относительно свойства промежуточности может быть различно как по величине, так и по направлению его нарушения, поэтому в (*Горбунов, Козлова, 2008*) введены усредненные квазиинвариантные индексы:

$$\overline{P}_{st} = \sqrt{P_{st}\hat{P}_{st}} = \sqrt{\frac{\lambda_s e_t u_s}{\lambda_t e_s u_t}}, \quad \overline{Q}_{st} = \sqrt{Q_{st}\hat{Q}_{st}} = \sqrt{\frac{u_t \lambda_t e_t}{u_s \lambda_s e_s}}. \tag{4}$$

Эти индексы транзитивны и мультипликативны, но свойство промежуточности для них также не гарантировано.

3. В силу неединственности (в общем случае) совместной системы неравенств задача решения (2) должна быть доопределена введением некоторого критерия качества, т.е. как задача нелинейного программирования. Задача линейного программирования даёт угловые (опорные) решения, которые могут приводить к большим вариациям соседних индексов (4) и даже содержать нулевые компоненты, что недопустимо. Наиболее естественно (*Горбунов, 2004*) ставить задачу поиска набора чисел Африата $\{u_t, \lambda_t\}$, наиболее близкого набору $\{u_t^F, \lambda_t^F\}$, определяемому статистическими индексами Фишера цен F_{st}^p и количеств F_{st}^q для ситуаций потребления (p^s, x^s) и (p^t, x^t):

$$F_{st}^p = \sqrt{\frac{e_{t0}e_t}{e_0 e_{0t}}}, \quad F_{st}^q = \sqrt{\frac{e_{0t}e_t}{e_0 e_{t0}}}. \tag{5}$$

Эти индексы удовлетворяют всем основным тестам Фишера, кроме транзитивности. Подставив индексы F_{0t}^p и F_{0t}^q в левые части соответствующих формул (3), получим «пробные» числа Африата

$$\lambda_t^F = \frac{1}{F_{0t}^p}, \quad u_t^F = e_0 F_{0t}^q, \quad t = \overline{1,T}.$$

Таким образом, критерием качества решения системы (2) будем считать квадратичный функционал

$$\varphi(u,\lambda)=\sum_{t=1}^{T}\left[(u_t-u_t^F)^2+(\lambda_t-\lambda_t^F)^2\right]. \qquad (6)$$

Подробная схема решения задачи квадратичного программирования – минимизации (6) при условиях (2), $\lambda_0=1$, $u_0=e_0$ – представлена в (*Горбунов, 2004; Горбунов, Козлова, 2008*).

4. В (*Горбунов, Козлова, 2008*) представлены результаты построения квазиинвариантных индексов для реальной статистики цен в г.Иркутске и смоделированным значениям спроса. Здесь приведём результаты построения квазиинвариантных индексов на основе статистики потребления *хлеба пшеничного, растительного масла и молока* в Ульяновской области в 2007 году. При этом известны помесячные цены на продукты[1] и количества их потребления на начало и конец года[2]. Помесячные количества потребления смоделированы по методике (*Горбунов, Козлова, 2008*) с использованием функций спроса, порождаемых логарифмической функцией полезности. Соответствующая статистика потребления представлена в таблице 1.

Таблица 1. Потребление в Ульяновской области за 2007 г.

Месяц	Цены, руб.			Покупки, кг/год			Расход
	Хл.пш.	Р.масло	Молоко	Хл.пш.	Р.масло	Молоко	
Янв.	22,8	35,0	14,7	3,40	0,8	4,89	189,00
Фев.	23,2	35,4	14,8	3,36	0,8	4,87	189,49
Мар.	23,2	35,4	14,6	3,32	0,8	4,90	188,08
Апр.	23,3	35,4	14,8	3,29	0,8	4,94	189,56
Май.	23,3	35,3	14,7	3,25	0,8	4,50	178,49
Июн.	24,8	35,0	14,8	3,21	0,8	4,35	179,51
Июл.	26,0	35,4	14,9	3,18	0,8	4,50	186,45
Авг.	25,7	36,6	15,1	3,14	0,8	4,53	186,87
Сен.	25,6	42,9	16,4	3,10	0,8	4,48	193,51
Окт.	25,7	55,7	18,6	3,07	0,8	4,61	211,61
Ноя.	25,7	55,9	20,0	3,03	0,8	4,49	217,09
Дек.	25,6	55,9	20,2	3,00	0,8	4,51	218,21

Даже поверхностный анализ говорит об изменении структуры спроса на данные продукты, что означает неоднородность предпочтений данного ансамбля потребителей. Формально это выражается в заметной несовмест-

[1] http://www.gks.ru/

[2] Потребление продуктов питания в домашних хозяйствах Ульяновской области за 2007 год. Экспресс-информация / Ульяновскстат, Ульяновск, 2008.

ности соответствующих специальных систем Африата. Общая система Африата имеет несущественную несовместность (максимальная по неравенствам (2) невязка на полученном решении равна 0.0001). По полученным числам Африата построены квазиинвариантные индексы (4). Они, а также индексы Фишера (5) приведены в таблице 2.

Таблица 2. Индексы Фишера и квазиинвариантные.

t	P_t^-	$F_{1,t}^p$	$\overline{P}_{1,t}$	P_t^+	Q_t^-	$F_{1,t}^q$	$\overline{Q}_{1,t}$	Q_t^+
1	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
2	1,00	1,01	1,01	1,02	0,98	0,99	0,99	1,00
3	0,99	1,01	1,01	1,02	0,96	0,98	0,97	0,99
4	1,00	1,01	1,01	1,02	0,94	0,96	0,96	0,99
5	1,00	1,01	1,01	1,02	0,92	0,95	0,95	0,98
6	1,00	1,04	1,05	1,09	0,90	0,94	0,93	0,98
7	1,01	1,07	1,08	1,14	0,88	0,93	0,91	0,97
8	1,03	1,07	1,09	1,13	0,86	0,92	0,91	0,97
9	1,11	1,14	1,14	1,22	0,85	0,91	0,91	0,99
10	1,13	1,26	1,25	1,59	0,81	0,90	0,91	1,02
11	1,13	1,30	1,26	1,60	0,81	0,89	0,92	1,00
12	1,13	1,31	1,27	1,59	0,79	0,88	0,91	0,99

Данные и другие результаты построения квазиинвариантных индексов по реальной статистики показывают, что свойство промежуточности для них, как правило, выполняется. Они показывают более умеренный рост цен и снижение количеств потребления, чем бинарные индексы Фишера, что отражает рациональность потребителей, меняющих структуру потребления при изменении структуры цен в соответствии со своими предпочтениями. Таким образом, квазиинвариантные индексы, как частный случай аналитических индексов, могут использоваться для более объективной оценки изменений в показателях потребления, учитывающей приспособительные эффекты замещения.

Автор благодарит научного руководителя В.К.Горбунова за внимание и помощь в работе.