ОСОБЕННОСТИ АГРЕГИРОВАНИЯ ПОТРЕБИТЕЛЬСКОГО СПРОСА

В.К.Горбунов
д.ф.-м.н., профессор,
зав. каф. ЭММИТ УГУ

1. Введение

Данная статья[1] посвящена изложению проблемы агрегирования потребительского спроса (агрегирования покупателей), недостаточно освещённой в русскоязычной научной и учебной литературе, а также её решению. Объективное и лаконичное изложение, а также решение этой и других проблем развития экономической теории, как и её приложений, возможно лишь на языке математической экономики, активно используемом зарубежными экономистами с середины XX века. Согласно мнению редакторов "Journal of Mathematical Economics" (B. Cornet et al.)[2] "*the formal mathematical expression of economic ideas is of vital importance to economics. Such an expression can determine whether a loose economic intuition has a coherent, logical meaning. Also, a full formal development of economic ideas can itself suggest new economic concepts and intuitions*"[3].

Основы современной теории потребительского спроса (ПС)[4] заложены в конце XIX века в рамках теории полезности. Её вершиной стала классическая математическая модель рационального потребительского выбора, заключающаяся в максимизации кардинальной (измеримой) непрерывной, возрастающей и вогнутой функции полезности $u(x)$ на множестве бесконечно делимых товаров (благ) конечного потребления $X_{pe} = \left\{x \in R^n_+ : \langle p,x\rangle \le e\right\}$[5], доступных при данных ценах p и расходах (*expenditures*) e на данном рынке:

$$v(p,e) = max\left\{u(x) : \langle p,x\rangle \le e,\ x \ge 0\right\}. \qquad (1)$$

Значение этой экстремальной задачи (выпуклого программирования) $v(p,e)$ называется *косвенной функцией полезности.*

Модель (1) аккумулировала основные законы спроса, открытые в XIX веке О. Курно, Г. Госсеном, У. Джевонсом, Э. Энгелем. Она определяет *функцию спроса*[6] (*demand function*) как зависимость $x(p,e)$ покупаемого набора товаров от цен и величины расходов. Классическая модель позволила применить для развития теории и количественных методов анализа ПС эффективный математический аппарат. Уже в 1915 году это привело к выявлению российским матема-

---

[1] Статья представляет расширенный вариант части доклада автора «О проблемах теории потребительского спроса» на III Всероссийском симпозиуме по экономической теории (Екатеринбург, 24-27 июня 2008 г.). Исследование выполнено при финансовой поддержке РГНФ, проект № 07-02-21202 а/В.

[2] http://ees.elsevier.com/jme

[3] формальное математическое выражение экономических идей имеет жизненное значение для экономической теории. Такое выражение может определить, имеет ли свободная экономическая интуиция последовательное логическое значение. Кроме того, полное формальное развитие экономических идей может предложить новые экономические понятия и догадки.

[4] Mas-Colell A., Whinston M., Green J. Microeconomic Theory. New York: Oxford Univ. Press, 1995; Горбунов В.К. Математическая модель потребительского спроса: Теория и прикладной потенциал. М.: Экономика, 2004.

[5] Здесь и далее $R^n_+ = \left\{x \in R^n : x \ge 0\right\}$, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ обозначает скалярное произведение.

[6] В общем случае – многозначное соответствие (demand correspondence).

тиком Е.Е. Слуцким[1] новых законов замещения и дополнения, более подробно изученных позднее в книге Дж. Хикса[2] (1939). Эта модель стала основой нового направления индексологии – теории экономических (аналитических) индексов, – основанного также российским экономистом-математиком А.А. Конюсом в 1924 году[3] и активно развивавшимся зарубежными исследователями[4], а также в наших работах[5].

Хорошо известна критика кардинальной теории полезности на рубеже XIX и XX столетий, завершившаяся созданием новой, порядковой теории ПС, основанной вначале на понятии *шкалы предпочтений*, введённом В. Парето (1909). Эта теория получила завершение в упомянутой книге Хикса (1939). Основным объектом новой теории стали эффекты замещения потребляемых продуктов. При этом вместо «полезности» использовалось новое понятие *предельной нормы замещения* (ПНЗ), допускающей статистическую оценку. Позже понятие «*предпочтение»* концептуально вытеснило «*полезность»*, и современная теория спроса построена на основе понятия *бинарного отношения предпочтения* (БОП) $\succeq$, определённого на множестве товаров R_+^n |[6] и обладающего рядом свойств, основные из которых – *полнота, транзитивность и непрерывность*. По теореме Дж. Дебре (1954) эти свойства в совокупности обеспечивают существование непрерывной *порядковой* функции полезности $u(x)$, или *функции предпочтения,* являющейся индикатором данного БОП, т.е. $x \succeq y \Leftrightarrow u(x) \geq u(y)$. Соответственно, рациональное поведение потребителей стало вновь моделироваться как максимизация (1) функции полезности, теперь порядковой.

Однако плодотворное развитие теории ПС в середине XX века столкнулось с серьёзной, по мнению ведущих специалистов (У. Горман, Х. Зонненшейн и др.), методологической проблемой, связанной с агрегированием потребительского спроса (агрегированием покупателей). Дело в том, что по общепринятой схеме теория спроса считается разделом микроэкономики, и в начале или исключительно[7] она излагается как теория личного потребления в рамках модели максимизации функции предпочтения и в значительной части имеет нормативный характер. Однако экономическая теория, как и любая наука, нацелена на решение реальных проблем. Реальной проблемой экономической теории потребления является изучение *коллективного (агрегированного, совокупного, рыноч-*

---

[1] Слуцкий Е.Е. К теории сбалансированного бюджета потребителя // Народнохозяйственные модели: Теоретич. вопросы потребления. Изд. АН СССР, 1963 (оригинал опубликован на итальянском языке в 1915).

[2] Хикс Дж. Р. Стоимость и капитал. М.: Прогресс, 1993 (1939).

[3] А.А. Конюс. Проблема истинного индекса стоимости жизни // Экономика и матем. методы. Т.27. 1989 (1924, переиздание). No. 3.

[4] Samuelson P.A. and Swamy S. Invariant economic index numbers and canonical duality: survey and synthesis // The American Economic Review. 1974. V.64. No 4.

[5] Горбунов В.К., 2004; Горбунов В.К., Козлова Л.А. Построение и исследование квазиинвариантных индексов потребления // Всерос. Конф. «Равновесные модели экономики и энергетики». Секция «Матем. экономика» XIV Байкальской межд. школы-семинара «Методы оптимизации и их приложения», Иркутск, Байкал, 2-8 июля 2008 года: Изд-во ИСЭМ СО РАН. 2008.

[6] Запись $x \succeq y$ означает, что набор x предпочтительней или равноценен набору y.

[7] Интрилигатор М. Математические методы оптимизации и экономическая теория. - М.: Прогресс, 1975; Емцов Р.Г., Лукин М.Ю. Микроэкономика. М.: МГУ, Изд-во ДИС, 1997.

ного) спроса, и это в прикладном отношении важнее, чем теория индивидуального спроса, относящаяся более к психологии и социологии. Так, в частности, считали уже Маршалл и Хикс (*Хикс, 1993: с. 104, 128*). Кроме очевидной практической направленности, модель рыночного спроса необходима для построения теории общего экономического равновесия, основанной Л. Вальрасом.

Современная теория агрегированного рыночного спроса, как и индивидуального, также основана на модели максимизации функции предпочтения (1) (*Mas-Colell et al.*: *Chap. 4*). Такая схема, видимо, объясняется желанием построить теорию макрообъекта – рыночного спроса – через теорию микрообъекта – индивидуального потребителя, причём на основе одинаковой аналитической модели. При этом естественно возник вопрос об аналитических свойствах индивидуальной и коллективной функций предпочтения, обеспечивающих корректное агрегирование. Ответ был дан в статье Гормана 1953 года[1]. Оказалось, что необходимым и достаточным условием корректного агрегирования является "выпрямление" кривых Энгеля (зависимостей спроса от величины расходов при фиксированных ценах) для всех покупателей, причём все индивидуальные прямые Энгеля должны быть параллельными. Аналогичный результат получен в последние годы В.И. Зоркальцевым[2]. Это противоречит известным свойствам потребительского спроса, в частности, наличию товаров различной субъективной потребительской ценности.

Далее, в 70-е годы XX столетия был выявлен другой дефект агрегирования индивидуальных спросов, порождаемых моделью (1), разрушающий значительную часть современной теории общего экономического равновесия (*Mas-Colell et al.*: *Part 4*). В этой теории основным объектом является *избыточный спрос*, т.е. разность коллективного спроса и предложения экономики (производимых товаров и обмениваемой собственности). Экономика считается замкнутой и все доходы потребителей расходуются. При этом доходы потребителей и прибыль фирм определяются ценами, соответственно, избыточный спрос рассматривается также как функция цен $Z(p): R^n_+ \to R^n_+$. Фундаментальными свойствами избыточного спроса являются однородность нулевой степени (т.е. $Z(\alpha p) = Z(p)$ для любого числа $\alpha > 0$) и выполнение «закона Вальраса» $\langle p, Z(p) \rangle = 0$ (стоимость спроса равна стоимости предложения). Было установлено (теорема Дебре-Зонненшейна-Мантеля[3]), что произвольная непрерывная функция $Z(p)$, однородная нулевой степени и удовлетворяющая закону Вальраса, может быть представлена на некотором множестве, находящемся внутри области R^n_+, суммой индивидуальных избыточных спросов, которые порождаются различными предпочтениями классического типа (полными, непрерывными, транзитивными, выпуклыми), т.е. она может считаться агрегированным избыточным спросом. Это

[1] Gorman W.M. Community preference fields // Econometrica. 1953. V. 21. No.1.

[2] Зоркальцев В.И.: Проблемы агрегирования в экономике: есть ли логическая совместимость микроэкономики и макроэкономики? Препринт СЭИ СО РАН, 1997; Агрегирование экономических субъектов. Препринт №5, ИСЭМ СО РАН. – Иркутск, 2000.

[3] Впервые доказана (для n=2) в *Sonnenschein H.* Market excess demand functions // Econometrica. 1972. V.40. No. 3; См. также сайты http://cepa.newschool.edu/het/profiles/ sonnens.htm; http://en.wikipedia.org/wiki/Sonnenschein-Mantel-Debreu_Theorem .

также противоречит жёстким аналитическим ограничениям на функции спроса, определяемым моделью максимизации функции предпочтения и обеспечивающим справедливость важнейших результатов по единственности и устойчивости теории равновесия.

Эти противоречия современной теории агрегирования потребительского спроса представляют методологический кризис построения соответствующего раздела микроэкономики. Его осознание привело к глубокому скепсису ряда исследователей относительно корректности использования существующей теории ПС для построения теории общего экономического равновесия (Зонненшейн, см. указ. сайты) и, тем более, её практического использования. Обосновано также утверждение о несовместимости современных микро и макроэкономической теорий (Зоркальцев). Работы по теории ПС и экономического равновесия, игнорирующие проблему агрегирования покупателей, в большей или меньшей мере являются схоластическими.

Вместе с тем в последние годы развивается и успешно используется на практике «*непараметрический метод*» анализа рыночного спроса, представленного конечным набором статистических данных (торговой статистикой), предложенный в классической статье С. Африата (1967) и развитый в работах Х. Вэриана[1] и других исследователей. Этот анализ представляет количественный аппарат проверки адекватности классической модели (1) наблюдаемому рыночному спросу, и в случае адекватности позволяет строить по торговой статистике коллективную функцию предпочтения. В рамках этого метода, в частности, появилась возможность строить специальные аналитические индексы потребительского спроса, для однородных предпочтений – инвариантные (*Samuelson and Swamy, 1974*), и в общем случае – квазиинвариантные (*Горбунов, 2004; Горбунов, Козлова, 2008)*.

Успех непараметрического анализа рыночного спроса легко объясним. Классическая модель ПС (1) возникла в результате осмысления и математической формализации эмпирических законов потребительского поведения, наблюдаемого через рыночную торговую статистику, а не на основе наблюдений индивидуальных покупателей, хотя такие выборочные наблюдения также продуктивны и входят в современную методологию статистических исследований спроса. Как и любая формальная модель, модель (1) основана на упрощающих предположениях и имеет свои границы применения. Теорема Африата и основанный на ней непараметрический анализ представляют эффективный аппарат проверки адекватности этой модели любому наблюдаемому рыночному сегменту без обращения к теории индивидуального потребления.

Разрыв микроэкономической теории и практики количественного анализа потребительского рыночного спроса требует осмысления и теоретического разрешения. Это, в частности, актуально для развития и внедрения в практику аналитических индексов ПС. Такая работа начата в нашей книге (*Горбунов, 2004*).

Во втором разделе статьи приводятся основные факты классической теории ПС. Третий раздел посвящён формальному изложению парадокса агрегиро-

[1] *Afriat S.N.* The construction of utility functions from expenditure data // International Economic Review. 1967. V.8. No 1; *Varian H.***:** The nonparametric approach to demand analysis // Econometrica. 1982. V.50. No. 4; Non-parametric tests of consumer behaviour // The Review of Economic Studies. 1983. V.50.

вания покупателей. В четвёртом предложено разрешение этого парадокса. В пятом приводится малоизвестная русскоязычному читателю теорема Африата. Шестой раздел – заключение.

2. Классическая теория потребительского спроса

Напомним основные факты классической теории ПС, основанной на модели потребительского выбора (1). Эта модель в микроэкономике применяется вначале (или исключительно) к индивидуальному потребителю. Она имеет аналитический характер. В рассматриваемом здесь *регулярном случае* строгой вогнутости и дважды дифференцируемости функции предпочтения $u(x)$ модель определяет однозначную и дифференцируемую (векторную) функцию спроса $x(p,e)$. При этом косвенная функция полезности имеет вид $v(p,e) = u(x(p,e))$.

Важную роль в теории ПС играет матрица Слуцкого (матрица замещения)

$$S(p,e) = \left\{ \frac{\partial x_i(p,e)}{\partial p_j} + \frac{\partial x_i(p,e)}{\partial e} x_j(p,e), \quad i,j = \overline{1,n} \right\}. \tag{2}$$

Функция спроса $x(p,e)$ (и её матрица (2)) удовлетворяет следующим аналитическим свойствам:

1) расходное тождество (закон Вальраса), т.е.

$$\langle p, x(p,e) \rangle = e, \quad \forall (p,e) > 0; \tag{3}$$

2) однородность нулевой степени, т.е.

$$x(\alpha p, \alpha e) = x(p,e), \quad \forall (p,e,\alpha) > 0; \tag{4}$$

3) матрица (2) симметричная и отрицательно полуопределённая, причём её нуль-пространство порождается вектором цен p (т.е. $S^T(p,e) = S(p,e)$, $v^T S(p,e) v \le 0$, $\forall v \in R^n$, причём равенство $v^T S(p,e) v = 0$ выполняется только для векторов вида $v = \alpha p$, $\forall \alpha \in R$)[1].

Первое свойство (3) важно для аналитической характеризации функции спроса, а также для уточнения смысла параметра e как фактических *потребительских расходов* на данном рынке. Такой параметр является наблюдаемой величиной, представляемой торговой статистикой (в отличие от *бюджета потребителя*, используемого в учебной литературе). Второе свойство (4) имеет простой смысл: пропорциональное увеличение цен и расходов не влияет на спрос. Из третьего свойства выводятся основные законы ПС, в частности, законы замещения и дополнения, сформулированные в упомянутых выше статье Слуцкого и в книге Хикса.

В аналитической теории ПС важное место уделяется так называемой «*проблеме интегрируемости*» функций спроса. Вопрос был поставлен в конце XIX века итальянским математиком Дж. Антонелли (цит. в *Mas-Colell et al., 1995*) и заключался в следующем. Какие аналитические свойства заданной функции $x(p,e)$ позволяют считать её функцией спроса, порождаемой некото-

[1] Здесь использованы правила матричных умножений, где векторы x, p и другие из R^n считаются столбцами, а их транспозиции x^T, p^T – строками.

рой *рационализирующей* функцией предпочтения $u(x)$[1] рамках модели (1)? Он решён окончательно в работе 1971 года Л. Гурвица и Х. Удзавы[2], где было доказано, что приведенные выше три свойства представляют необходимые и достаточные условия существования функции предпочтения $u(x)$, порождающей данную функцию спроса $x(p,e)$ в соответствии с моделью (1), т.е. эти условия являются *условиями интегрируемости* функции спроса. На языке предпочтений условия интегрируемости в силу теоремы Дебре есть непрерывность, полнота и транзитивность БОП, порождающего данный спрос.

Аналитическая теория ПС, основанная на модели (1), имеет также развитую теорию двойственности (теорию взаимной задачи минимизации расходов при заданном уровне потребления) (*Mas-Colell et al., 1995*).

Важное место в современной теории ПС играет понятие «*выявленного предпочтения» (ВП),* введённого П. Самуэльсоном (без явной терминологии, появившейся позже)[3]. Пусть даны два набора «цены – количества» (p,x) и (p',x') из наблюдений потребительского выбора. *Набор благ x называется выявлено предпочтительным набору x', если набор x' также мог быть куплен при ценах p, т.е.* $\langle p, x' \rangle \le \langle p, x \rangle$.

Самуэльсон предложил на базе этого понятия альтернативный принцип рациональности в виде утверждения, названного позже *Слабой Аксиомой ВП (Weak Axiom of Revealed Preference): Если набор x выявлено предпочтителен другому набору x' (купленному при ценах p'), то набор x' не может быть выявлено предпочтителен набору x.*

Формально Слабая Аксиома выражается импликацией:

$$\text{если } \langle p, x' \rangle \le \langle p, x \rangle \text{ и } x' \ne x, \text{ то } \langle p', x \rangle > \langle p', x' \rangle.$$

Теория ВП является попыткой построить альтернативную теорию ПС без классических понятий полезности или полного и транзитивного БОП и предположений об интегрируемости спроса. Для однозначной функции спроса $x(p,e)$, удовлетворяющей свойствам (3) и (4) Слабая Аксиома ВП формулируется так: для любых двух ситуаций «цены – расходы» (p,e) и (p',e') выполняется импликация:

$$\text{если } \langle p, x(p',e') \rangle \le e \text{ и } x(p',e') \ne x(p,e), \text{ то } \langle p', x(p,e) \rangle > e'.$$

Известно[4], что в регулярном случае выполнение Слабой Аксиомы обеспечивается отрицательной полуопределённостью матрицы Слуцкого (2). В общем случае при числе благ более двух эта матрица может быть несимметричной, соответственно, спрос $x(p,e)$ будет неинтегрируемым. Таким образом, Слабая Аксиома описывает более общий класс функций спроса, чем модель (1). Известно также усиление Слабой Аксиомы с помощью её транзитивного замыкания,

[1] Т.е. спрос, порождаемый такой функцией в рамках модели (1), совпадает с его наблюдаемыми (статистическими) значениями.

[2] Hurwicz, L., Uzawa, H. On the integrability of demand functions. // Chipman, J.S. et al. (Eds), Preference, Utility and Demand. Chap. 6. New York: Harcourt Brace, 1971.

[3] Samuelson P.A. A note of the pure theory of consumer's behaviour // Econopmetrica. 1938. V.5. No.17.

[4] Kihlstrom R, Mas-Colell A., Sonnenschein H. The Demand Theory of the Weak Axiom of Revealed Preference // Econometrica, Vol. 44, No. 5.

принадлежащее Х. Хаутеккеру[1] и называемое Сильной Аксиомой ВП (*Mas-Colell et al., 1995: 3.J*). Выполнение Сильной Аксиомы обеспечивает как отрицательную полуопределённость, так и симметричность матрицы Слуцкого, т.е. выполнение всех условий интегрируемости, а значит, эквивалентность соответствующей теории ПС классической теории.

3. Проблема агрегирования покупателей

Современные теория и методы количественного анализа агрегированного (рыночного) спроса, как и индивидуального, также основаны на модели (1) максимизации некоторой *коллективной функции предпочтения*. При этом в качестве параметра расходов используется величина совокупных расходов всех потребителей, точнее, покупателей. Именно эта величина поддаётся наблюдению. Рассмотрим вопрос о совместимости такого описания. Формально требуется выяснить, какие аналитические свойства индивидуальных и коллективной функций предпочтения, обеспечивают корректное агрегирование.

Пусть имеется ансамбль H потребителей-покупателей (*householders*) с регулярными функциями предпочтения $u_h(x)$ и расходами e_h, $h = \overline{1,H}$. Для каждого покупателя модель (1) однозначно определяет функцию спроса $x^h(p,e_h)$. Введём обозначения $E = e_1 + ... + e_H$ для общих расходов покупателей и $U(x)$ для коллективной функции предпочтения, считая её также регулярной. Для этих объектов модель (1) также однозначно определяет функцию спроса $X(p,E)$**.** Последняя может считаться агрегированным (совокупным, рыночным) спросом данного ансамбля покупателей, если выполняется баланс

$$X(p,E) = \sum_{h=1}^{H} x^h(p,e_h). \qquad (5)$$

Попытки построения по заданным индивидуальным функциям предпочтения $u_h(x)$ коллективной функции $U(x)$ так, чтобы выполнялось условие (5), показали, что это не всегда возможно. Соответственно, возник вопрос, какими свойствами должны обладать индивидуальные функции $u_h(x)$, чтобы существовала коллективная функция $U(x)$ такая, что для порождаемых функций спроса выполнялся баланс (5)? Ответ был дан в статье (*Gorman, 1953*), в терминах *«кривых Энгеля»* – множеств (пространства товаров R_+^n) значений спроса при фиксированных ценах p и всевозможных расходах e, т.е. $E_h(p) = \{x = x^h(p,e) : e > 0\}$. Оказалось, что (**теорема Гормана**) ***для существования коллективной функции предпочтения*** $U(x)$***, порождающей рыночный спрос*** $X(p,E)$**,** ***удовлетворяющий балансу*** (5)**,** ***необходимо и достаточно, чтобы все кривые Энгеля*** $E_h(p)$, $h = \overline{1,H}$ **,** ***были параллельными прямыми***.

Для регулярных функций спроса условие параллельности прямых Энгеля имеет вид системы равенств

[1] HauthakkerH.S. Revealed preference and the utility function // Economica. 1950. V.17.

$$\frac{\partial x_i^h(p,e_h)}{\partial e_h} = c_i(p),\ i=\overline{1,n},\ h=\overline{1,H}. \qquad (6)$$

Эту систему нетрудно вывести (как необходимое условие) из равенства (5) с учётом независимости рыночного спроса $X(p,E)$ от распределения $\{e_1,\ldots,e_H\}$ расхода E между покупателями (*Mas-Colell et al., 1995: 4.B)*.

Замечание. *Следствием параллельности индивидуальных прямых Энгеля $E_h(p)$ является «выпрямление» кривой Энгеля $E_\Sigma(p)$ агрегированного спроса $X(p,E)$ и параллельность её прямым $E_h(p)$, т.е.*

$$\frac{\partial X_i(p,E)}{\partial E} = c_i(p),\ i=\overline{1,n}. \qquad (7)$$

Для доказательства равенств (7) достаточно положить в (5) $e_h = \alpha_h E$, где $\alpha_1 + \ldots + \alpha_H = 1$, и продифференцировать полученное равенство по E.

Таким образом, корректное агрегирование индивидуальных спросов, удовлетворяющее условию (5), приводит к агрегированному спросу $X(p,E)$, имеющему «выпрямленные» кривые, т.е. прямые Энгеля $E_\Sigma(p)$.

Свойством (6), в частности, обладают однородные предпочтения, порождающие функции спроса со структурой (относительными потреблениями товаров), не зависящей от расходов, т.е. $x^h(p,e_h) = x^h(p)e_h$. При этом равенства (6) требуют равенства всех функций $x^h(p)$ между собой.

В дальнейшем класс предпочтений, обладающих свойством (6), был более глубоко изучен Горманом[1] и другими авторами. Оказалось (*Mas-Colell et al., 1995: Prop. 4.B.1)*, что необходимым и достаточным условием выполнения равенств (6), а значит, существования коллективной функции полезности $U(x)$, является то, что все косвенные функции полезности имеют вид

$$v_h(p,e_h) \equiv u_h((x^h(p,e_h)) = a_h(p) + b(p)e_h.$$

Для однородных предпочтений, как нетрудно убедиться, $a_h(p) = 0$.

Таким образом, класс предпочтений, допускающих корректное агрегирование (в смысле (5)), является некоторым обобщением однородных предпочтений, но он недостаточен для представления известных свойств наблюдаемого рыночного спроса, установленным на основе анализа торговых статистик (классификация благ как *ценных, малоценных, заменителей*). В общем случае наблюдаемые множества Энгеля $E_\Sigma(p)$ являются действительно кривыми линиями, что соответствует различию в субъективных потребительских оценках различных товаров (темпы роста потребления различных товаров с ростом доходов и, соответственно, расходов покупателей различные).

Отметим, что в описанной схеме агрегирования индивидуальные потребители считаются независимыми. Но это противоречит очевидному взаимовлия-

[1] Gorman W.M. On a class of preference fields // Metroeconoica. 1961. V.13.

нию потребителей через обычаи и моду, а также влиянию рекламы и другим эффектам.

Второй парадокс агрегирования, как отмечено во введении, представляет **теорема Дебре-Зонненшейна-Мантеля (ДЗМ) (***Mas-Colell et al.*: *Pr.17.E.3*), утверждающая, что произвольная непрерывная функция $Z(p): R_+^n \to R_+^n$, однородная нулевой степени и удовлетворяющая закону Вальраса $\langle p, Z(p) \rangle = 0$, на множестве

$$P_\varepsilon = \left\{ p \in R_+^n : p_i / p_j \geq \varepsilon, \ \forall (i,j) \right\}$$

при любом $\varepsilon > 0$ может быть представлена суммой индивидуальных избыточных спросов, которые порождаются различными предпочтениями классического типа, т.е. $Z(p)$ может считаться агрегированным избыточным спросом. Это также противоречит жёстким аналитическим ограничениям на функции спроса, определяемым классической моделью максимизации функции предпочтения, именно, свойствам матрицы Слуцкого (2).

Теорема ДЗМ является разрушительной для значительной части теории общего равновесия. Равновесные цены в конкурентной экономике без дополнительных условий (относительно условий ДЗМ) существуют, но их единственность и устойчивость (естественные требования для содержательной теории, адекватной наблюдениям в стабильных экономических условиях) обеспечивается дополнительными условиями для избыточного спроса $Z(p)$ – Слабой Аксиомой ВП или *Условием Валовой Заменимости*[1] (*Mas-Colell et al.*: *17.F*). В отсутствии таких условий равновесных цен может быть сколько угодно, и каждый равновесный вектор цен может быть неустойчивым, как бы ни «правильны» были бы индивидуальные функции предпочтения, не удовлетворяющие условию Гормана.

Таким образом, требование «выпрямления» кривых Энгеля для индивидуальных и коллективных предпочтений, а также эффект ДЗМ делают несостоятельной традиционную схему построения теории потреблений "от индивидуального потребителя к коллективному" на основе одной и той же аналитической модели (1) максимизации функции предпочтения.

4. Агрегированный спрос – исходный объект моделирования

Несостоятельность современного построения нормативной части теории потребительского спроса не является основанием для отказа от её позитивной части, состоящей в формализации описания основного объекта теории – рыночного спроса. Последний представляет не отдельных потребителей, а их статистически значимые ансамбли. Именно статистика рыночного спроса (в том числе её подмножеств по уровням доходов, выделявшихся в исследованиях Энгеля) лежала в основе законов спроса, установленных классиками XIX века (Госсен, Джевонс, Вальрас …) и аккумулированных моделью (1). Эта модель имеет эффективный аппарат качественного и количественного анализа спроса, построения его (аналитических) индексов. Она может быть идентифицирована для ры-

[1] Если $p_l' > p_l$ и $p_k' = p_k$ для $k \neq l$, то $Z_k(p') > Z_k(p)$ для $k \neq l$.

ночного спроса по торговой статистике как классическим параметрическим методом (наименьших квадратов), так и более эффективным «непараметрическим методом», представленном в следующем разделе.

Способ освобождения теории потребительского рыночного спроса от описанных противоречий агрегирования достаточно очевиден (*Горбунов, 2004: с. 10 – 11, 61 -62*). Поскольку анализ статистических данных, представляющих ансамбли потребителей, привёл классиков к математической модели (1) максимизации функции предпочтения и развитию современного аналитического и вычислительного аппарата, то

- ***статистический ансамбль потребителей необходимо взять за априорный объект теории ПС***.

Соответственно, функция предпочтения в модели (1) является коллективной функцией, представляющей предпочтения статистического ансамбля потребителей, а параметр *e* представляет их совокупные расходы на моделируемом рынке. При этом следует признать, что

- ***для описания индивидуальных потребителей более уместен аппарат дискретных вероятностных процессов.***

Аналоги использования различного математического аппарата для описания сложных ансамблей и их компонент представляют физические теории сплошных сред. Здесь поведение молекул газов и жидкостей описывается как броуновское движение (дискретный стохастический процесс), а поведение газа, жидкости и твёрдых тел, состоящих из таких молекул, – детерминированными дифференциальными уравнениями. Более детальное описание материи на атомном уровне выполняет квантовая (дискретная) механика, оперирующая вероятностными распределениями координат и импульсов элементарных частиц.

5. Существование коллективной функции предпочтения. Теорема Африата

Любая теория имеет свои границы применения, и коллективная функция предпочтения, рационализирующая статистические данные, существует не всегда, особенно в периоды резких социально-экономических изменений. Но для таких периодов трудно рассчитывать на построение адекватной и детальной теории потребительского поведения. Практический критерий существования коллективной функции предпочтения, рационализирующей наблюдаемый спрос, был получен в 1967 году С. Африатом (*Afriat, 1967)*.

Потребительский спрос на конкретном рынке наблюдается через торговую статистику

$$\left\{p^t, x^t : t = \overline{0,T}\right\}, \tag{8}$$

где t обозначает моменты наблюдений в отчётный период от $t = 0$ до $t = T$, p^t – цены и x^t – количества продаж. Статистика (8) автоматически представляет совокупные потребительские расходы $e_t = \left\langle p^t, x^t \right\rangle$.

Рассмотрим значения искомой функции предпочтения $u(x)$ и множителя Лагранжа задачи (1) $\lambda(p,e)$ на данных (8):

$$u_t = u(x^t), \quad \lambda_t = \lambda(p^t, e_t). \tag{9}$$

Эти значения называются *числами Африата*. Наконец, введём *кросс-коэффициенты*

$$e_{ts} = \left\langle p^t, x^s \right\rangle, \quad a_{ts} = e_{ts} - e_t, \quad s,t = \overline{0,T}. \tag{10}$$

Теорема Африата[1]. *Непрерывная, возрастающая, вогнутая функция предпочтения, рационализирующая данные (8), существуёт тогда и только тогда, когда существует положительное решение* $\{u_t, \lambda_t\}$ *неравенств*

$$u_s - u_t - \lambda_t a_{ts} \le 0, \quad s,t = \overline{0,T}, \quad s \ne t. \tag{11}$$

Если система (11) имеет положительное решение, то кусочно-линейная функция

$$\overline{u}(x) = \min_t \left\{ u_t + \lambda_t \left\langle p^t, x - x^t \right\rangle \right\} \tag{12}$$

рационализирует данные (8).

Эта теорема является наиболее значительным результатом в теории потребительского спроса после работ Слуцкого и Хикса. В силу данной теоремы вопрос о существовании функции предпочтения, рационализирующей данные (8), решается эффективно. Для этого следует попытаться найти положительное решение системы линейных *неравенств Африата* (11) относительно чисел (9). Коэффициенты (10) этой системы определяются по статистическим данным (8). Если положительное решение существует, то классическая модель (1) адекватна поведению ансамбля потребителей на промежутке наблюдений, представленному статистикой (8). В случае отсутствия положительного решения ответ будет отрицательным, т.е. потребители данного рынка на данном промежутке времени не описываются стационарной моделью (1).

Таким образом, теорема Африата является основой метода идентификации модели (1), альтернативного классическому параметрическому методу наименьших квадратов. Существенной проблемой последнего является выбор класса параметризации искомой функции предпочтения. Теорема Африата в положительном случае представляет искомую функцию в непараметрическом кусочно-линейном виде (12). Соответственно, метод построения функции предпочтения (12) получил название *непараметрический метод (Varian: 1982; 1983).*

Следует отметить, что функция предпочтения Африата (12) не является регулярной (строго вогнутой и дважды непрерывно дифференцируемой), однако дальнейшие исследования[2] показали, что для существования бесконечно дифференцируемой вогнутой функции предпочтения, рационализирующей данные (8) необходимо и достаточно положительной разрешимости системы строгих неравенств Африата вида (11) (где вместо неравенств $\le$ используются неравенства $<$).

Отметим также, что формулировка теоремы Африата и описанный метод её практического использования идеализированы, так как не учитывают неизбежные погрешности статистических данных (8). Отсутствие положительного

[1] Мы приводим лишь основное утверждение из теоремы Африата.

[2] Chiappori P.-A., Rochet J.-C. Revealed preferences and differentiable demand // Econometrica. 1987. V. 55. N 3.

решения системы (11) может быть следствием как неадекватности модели (1), так и следствием неточности данных (8). Учёт погрешностей данных является нетривиальной проблемой идентификации любых математических моделей. Вычислительные проблемы и методы поиска положительного решения системы (11) (и её специального для однородных предпочтений варианта), решения, обладающего дополнительными свойствами, вытекающими из проблемы построения аналитических индексов спроса, подробно рассмотрены в наших работах (*Горбунов, 2004; Горбунов В.К., Козлова Л.А.)*.

Непараметрический метод анализа потребительского спроса изначально имеет практическую направленность и относится к агрегированному спросу, представляемому торговой статистикой (8). При его разработке Африатом и развитии последователями, в неявной форме игнорированы традиционная схема микроэкономической теории ПС – от индивидуального потребителя к коллективному – и вытекающие из неё проблемы агрегирования покупателей.

6. Заключение

Предложенный подход к моделированию рыночного спроса, основанный на рассмотрении ансамбля потребителей в качестве исходного объекта теории потребительского спроса, снимает описанные противоречия традиционного построения этой теории через моделирование поведения индивидуальных потребителей и их ансамбля аналитической моделью максимизации предпочтения (1).

Использование классической модели (1) для агрегированного спроса обеспечивает не только возможность его анализа и прогнозирования, но и возможность вычислять аналитические индексы потребительского спроса. Для этого следует строить функцию потребительских расходов, решая взаимную для (1) задачу минимизации расходов при заданном уровне потребления (*Горбунов, 2004*: *3.10, Гл.4)*. Такая задача достаточно сложна и требует развития методов построения коллективной функции предпочтения для реальных рынков. Непараметрический метод Африата – Вэриана позволяет строить упрощённые – специальные аналитические индексы, для однородных предпочтений – инвариантные, и в общем случае – квазиинвариантные (*Горбунов В.К., Козлова Л.А., 2008)*.

Для теории общего экономического равновесия предлагаемое ограничение использования модели (1) сохраняет известные результаты по существованию равновесия, и обеспечивает его единственность, так как Слабая Аксиома ВП здесь выполнена всегда, в отличие от агрегата (5).

Отказ от представления поведения индивидуальных потребителей через модель (1) влечёт отказ от «теорем о благосостоянии» вальрасовского равновесия, связывающих свойства равновесия и Парето-оптимальности. Однако эта теория ввиду парадоксов агрегирования имеет в современном виде схоластическое значение. Возможно, эти теоремы будут возрождены в новом содержании через более адекватное моделирование индивидуального спроса.

Автор благодарит В.И. Зоркальцева за плодотворные дискуссии по проблеме агрегирования покупателей.

Лллл

Горбунов Владимр Константинович
д.ф.-м.н., профессор.
Ульяновский государственный университет,
заведующий кафедрой Экономико-математических методов и информационных технологий
432031, Ульяновск, а.я. 833
(8422)532017; (8422)426103
vkgorbunov@mail.ru