ИССЛЕДОВАНИЕ ПАУТИННОЙ МОДЕЛИ РЫНКА МЕТОДАМИ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА

М.М. Зарубин,
к.ф.-м.н., КнАГТУ

Рассмотрим две основные категории рыночных отношений – спрос (demand) и предложение (supply). И то, и другое, выраженное в некоторых объёмных единицах q, зависит от многих факторов, среди которых главный – это цена (price) товара, которую обозначим p.

Получим две функции: функцию спроса $d(p)$ и функцию предложения $s(p)$. Известно, что $s(p)$ является возрастающей, а $d(p)$ - убывающей функциями. Считая их непрерывными, с учётом условий: $d(p) - s(p) > 0$ при малых p, $d(p) - s(p) < 0$ при больших p, получим существование точки p_0, для которой: $d(p_0) = s(p_0)$, т.е. спрос равен предложению.

Цена p_0 называется равновесной, спрос и предложение при этой цене также называются равновесными. При дополнительном условии строгой монотонности (хотя бы одной из функций) точка равновесия (q_0, p_0) единственна (рис.1).

Установление равновесной цены – одна из главных задач рынка.

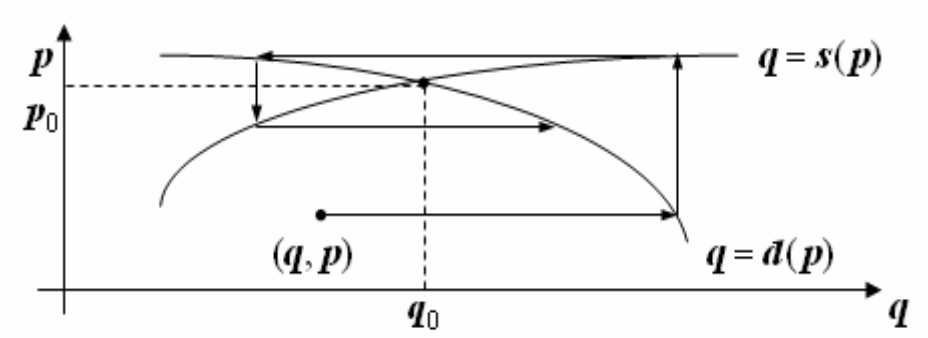


Рис.1. Паутинная модель рынка

Предположим, что решение об объёме производства товара принимается в полном соответствии с текущим уровнем спроса на данный товар (т.е. дефицит или затоваривание исключены). Тогда получим так называемую паутинную модель поиска равновесной цены (см. рис.1).

Выясним достаточные условия, при которых «спираль», берущая начало в произвольной точке (q, p), «скручивается» к равновесной точке (q_0, p_0) (феномен саморегуляции рынка) /1/.

Перейдём к обозначениям, принятым в анализе.

Пусть $y = f(x)$ и $x = g(y)$ - две непрерывные функции, причём $y = f(x)$ строго возрастает на отрезке $[a;b]$, принимая значения от c до d, а

функция $x = g(y)$ строго убывает на отрезке $[c;d]$ со значениями от b до a (рис.2).

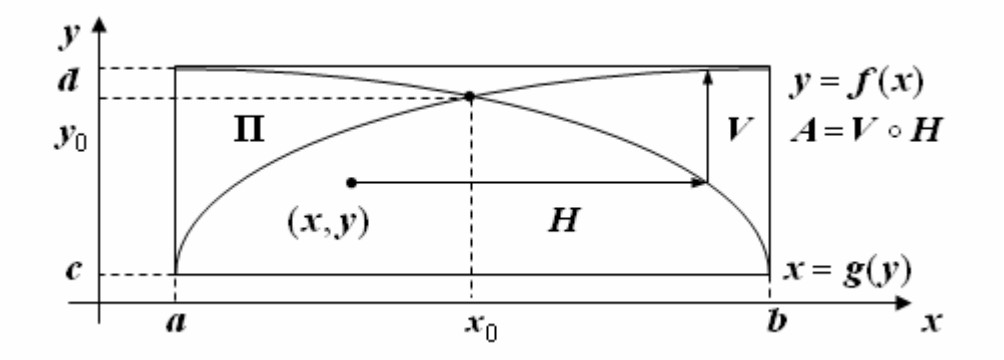


Рис.2. Действие оператора $A = V \circ H$

Будем считать, что обе функции удовлетворяют условию Липшица с некоторыми константами K_f и K_g, соответственно, т.е.

$$\forall\ x_1, x_2 \in [a;b] \quad : \quad \left| f(x_1) - f(x_2) \right| \le K_f \cdot \left| x_1 - x_2 \right| \ , \qquad (1)$$

$$\forall\ y_1, y_2 \in [c;d] \quad : \quad \left| g(y_1) - g(y_2) \right| \le K_g \cdot \left| y_1 - y_2 \right| \ . \qquad (2)$$

В частности, если функции f и g - гладкие, то, в силу теоремы Лагранжа, в качестве констант Липшица могут быть взяты максимумы модулей их производных.

Прямоугольник $\Pi = [a;b] \times [c;d]$, как замкнутое подмножество полного метрического пространства R^2, сам является полным метрическим пространством относительно любой из индуцированных метрик:

$$\rho_p\left((x_1, y_1),(x_2, y_2)\right) = \sqrt[p]{\left|x_1 - x_2\right|^p + \left|y_1 - y_2\right|^p} \quad 1 \le p < \infty \ , \qquad (3)$$

$$\rho_\infty\left((x_1, y_1),(x_2, y_2)\right) = \max\left\{\left|x_1 - x_2\right|, \left|y_1 - y_2\right|\right\} \qquad p = \infty \ . \qquad (4)$$

Рассмотрим оператор $A = V \circ H$ - композицию двух операторов, действующих из Π в Π, где $H(x,y) = \left(g(y), y\right)$ - горизонтальное звено паутинной модели, $V(x,y) = \left(x, f(x)\right)$ - вертикальное звено паутинной модели (см. рис.2).

Равновесная точка (x_0, y_0) является единственной неподвижной точкой оператора $A : \Pi \to \Pi$.

В силу фундаментальной теоремы функционального анализа о сжимающем отображении полного метрического пространства в себя /2/, получив условие сжимаемости оператора A в любой из p-метрик (3),(4), получим достаточное условие «скручиваемости» спирали паутинной модели к равновесной точке (x_0, y_0) (сходимости соответствующего итерационного процесса $\left(x_{n+1}, y_{n+1}\right) = A\left(x_n, y_n\right)$ к неподвижной точке оператора A).

При $1 \le p < \infty$, воспользовавшись определением метрики (3) и условиями Липшица (1), (2), получим:

$$\rho_p\left(A(x_1, y_1), A(x_2, y_2)\right) = \rho_p\left(V \circ H(x_1, y_1), V \circ H(x_2, y_2)\right) =$$

$$= \rho_p\big(\boldsymbol{V}(\boldsymbol{H}(x_1, y_1)), \boldsymbol{V}(\boldsymbol{H}(x_2, y_2))\big) = \rho_p\big(\boldsymbol{V}(\boldsymbol{g}(y_1), y_1), \boldsymbol{V}(\boldsymbol{g}(y_2), y_2)\big) =$$
$$= \rho_p\big((\boldsymbol{g}(y_1), \boldsymbol{f}(\boldsymbol{g}(y_1))), (\boldsymbol{g}(y_2), \boldsymbol{f}(\boldsymbol{g}(y_2)))\big) =$$
$$= \sqrt[p]{|\boldsymbol{g}(y_1) - \boldsymbol{g}(y_2)|^p + |\boldsymbol{f}(\boldsymbol{g}(y_1)) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{g}(y_2))|^p} \le$$
$$\le \sqrt[p]{\boldsymbol{K}_g^p \cdot |y_1 - y_2|^p + \boldsymbol{K}_f^p \cdot |\boldsymbol{g}(y_1) - \boldsymbol{g}(y_2)|^p} \le$$
$$\le \sqrt[p]{\boldsymbol{K}_g^p \cdot |y_1 - y_2|^p + \boldsymbol{K}_f^p \cdot \boldsymbol{K}_g^p \cdot |y_1 - y_2|^p} =$$
$$= \sqrt[p]{\boldsymbol{K}_g^p + \boldsymbol{K}_f^p \cdot \boldsymbol{K}_g^p} \cdot \sqrt[p]{|y_1 - y_2|^p} \le$$
$$\le \sqrt[p]{\boldsymbol{K}_g^p + \boldsymbol{K}_f^p \cdot \boldsymbol{K}_g^p} \cdot \sqrt[p]{|x_1 - x_2|^p + |y_1 - y_2|^p} =$$
$$= \sqrt[p]{\boldsymbol{K}_g^p + \boldsymbol{K}_f^p \cdot \boldsymbol{K}_g^p} \cdot \rho_p\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big).$$

Величина $\sqrt[p]{\boldsymbol{K}_g^p + \boldsymbol{K}_f^p \cdot \boldsymbol{K}_g^p}$ оказалась константой сжатия оператора $\boldsymbol{A}$ в соответствующей $\boldsymbol{p}$-метрике, поэтому выполнение условия:

$$\sqrt[p]{\boldsymbol{K}_g^p + \boldsymbol{K}_f^p \cdot \boldsymbol{K}_g^p} < 1 \qquad (5)$$

или равносильного (5) более простого условия:

$$\boldsymbol{K}_g^p + \boldsymbol{K}_f^p \cdot \boldsymbol{K}_g^p < 1 \qquad (6)$$

хотя бы при одном значении $1 \le \boldsymbol{p} < \infty$ достаточно для сходимости итерационного процесса $(x_{n+1}, y_{n+1}) = \boldsymbol{A}(x_n, y_n)$ к неподвижной точке (x_0, y_0) оператора $\boldsymbol{A}$, т.е. гарантирует «скручиваемость» спирали паутинной модели к равновесной точке (x_0, y_0).

При $\boldsymbol{p} = \infty$, воспользовавшись определением метрики (4) и условиями Липшица (1), (2), получим:

$$\rho_\infty\big(\boldsymbol{A}(x_1, y_1), \boldsymbol{A}(x_2, y_2)\big) = \rho_\infty\big(\boldsymbol{V} \circ \boldsymbol{H}(x_1, y_1), \boldsymbol{V} \circ \boldsymbol{H}(x_2, y_2)\big) =$$
$$= \rho_\infty\big(\boldsymbol{V}(\boldsymbol{H}(x_1, y_1)), \boldsymbol{V}(\boldsymbol{H}(x_2, y_2))\big) = \rho_\infty\big(\boldsymbol{V}(\boldsymbol{g}(y_1), y_1), \boldsymbol{V}(\boldsymbol{g}(y_2), y_2)\big) =$$
$$= \rho_\infty\big((\boldsymbol{g}(y_1), \boldsymbol{f}(\boldsymbol{g}(y_1))), (\boldsymbol{g}(y_2), \boldsymbol{f}(\boldsymbol{g}(y_2)))\big) =$$
$$= \max\big\{|\boldsymbol{g}(y_1) - \boldsymbol{g}(y_2)|, |\boldsymbol{f}(\boldsymbol{g}(y_1)) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{g}(y_2))|\big\} \le$$
$$\le \max\big\{\boldsymbol{K}_g \cdot |y_1 - y_2|, \boldsymbol{K}_f \cdot |\boldsymbol{g}(y_1) - \boldsymbol{g}(y_2)|\big\} \le$$
$$\le \max\big\{\boldsymbol{K}_g \cdot |y_1 - y_2|, \boldsymbol{K}_f \cdot \boldsymbol{K}_g \cdot |y_1 - y_2|\big\} \le$$
$$\le \max\big\{\boldsymbol{K}_g, \boldsymbol{K}_f \cdot \boldsymbol{K}_g\big\} \cdot |y_1 - y_2| \le$$
$$\le \max\big\{\boldsymbol{K}_g, \boldsymbol{K}_f \cdot \boldsymbol{K}_g\big\} \cdot \max\big\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\big\} =$$
$$= \max\big\{\boldsymbol{K}_g, \boldsymbol{K}_f \cdot \boldsymbol{K}_g\big\} \cdot \rho\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big).$$

Величина $\max\{\boldsymbol{K}_g, \boldsymbol{K}_f \cdot \boldsymbol{K}_g\}$ оказалась константой сжатия оператора $\boldsymbol{A}$ в метрике $\boldsymbol{p} = \infty$, поэтому выполнение условия:

$$\max\big\{\boldsymbol{K}_g, \boldsymbol{K}_f \cdot \boldsymbol{K}_g\big\} < 1 \qquad (7)$$

или равносильных (7) более простых условий:

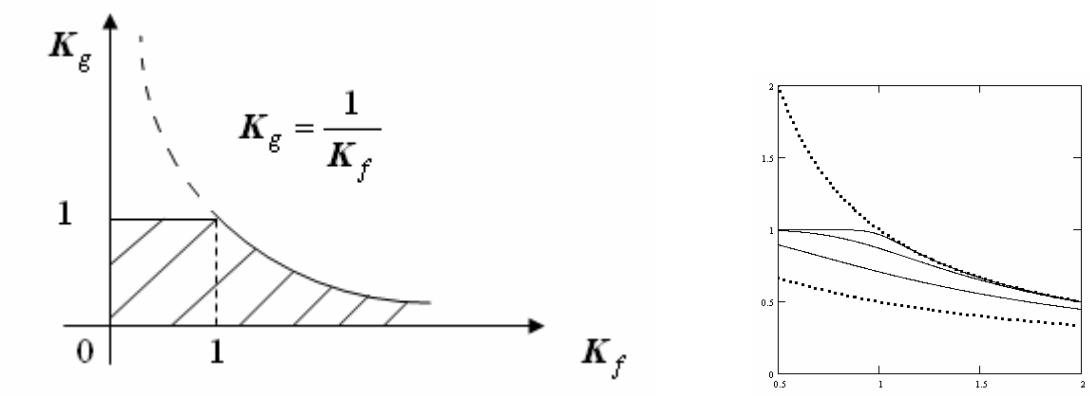
$$\begin{cases} K_f \cdot K_g < 1 \\ K_f \geq 1 \end{cases} \tag{8}$$

или

$$\begin{cases} K_g < 1 \\ K_f < 1 \end{cases} \tag{9}$$

достаточно для сходимости итерационного процесса $(x_{n+1}, y_{n+1}) = A(x_n, y_n)$ к неподвижной точке (x_0, y_0) оператора A, т.е. гарантирует «скручиваемость» спирали паутинной модели к равновесной точке (x_0, y_0).

Условия (8), (9) легко проиллюстрировать (рис.3, *а*).



(*а*) (*б*)

Рис.3. Достаточные условия сходимости паутинной модели рынка к равновесной точке

На рисунке 3, *а* зона положительных констант Липшица K_f и K_g гарантирующих «скручиваемость» спирали паутинной модели к равновесной точке заштрихована и представляет собой два участка: зона, расположенная под прямой $K_g = 1$ при $K_f < 1$ и зона, расположенная под гиперболой $K_g = \frac{1}{K_f}$ при $K_f \geq 1$.

Несколько сложнее выглядит условие (6). Однако, преобразовав его, получим равносильное ему условие:

$$K_g < \frac{1}{\sqrt[p]{1 + K_f^p}} \quad 1 \leq p < \infty \ . \tag{10}$$

Семейство функций $y_p(x) = \frac{1}{\sqrt[p]{1 + x^p}} = \left(1 + x^p\right)^{-1/p}$, $x > 0$, $1 \leq p < \infty$, ведёт себя так, как показано на рисунке 3, *б*, на котором приведены их графики для значений $p = 1, 2, 5, 20$, построенные в MathCAD. Нижний график соответствует функции $y_1(x) = \frac{1}{1 + x}$, а верхний – гиперболе $y(x) = \frac{1}{x}$, из которой

$y_1(x)$ может быть получена сдвигом влево по оси x на единицу (оба графика выделены пунктиром). Графики остальных функций $y_p(x)$ занимают промежуточное положение (см. рис.3, *б*), стремясь при $p \to +\infty$ к положению, изображённому на рисунке 3, *а* (верхняя граница заштрихованной зоны).

Этот результат можно подтвердить и теоретическими выкладками.

При $x > 1$ применяя правило Лопиталя получим:

$$\lim_{p\to+\infty} \ln\left(y_p(x)\right) = \lim_{p\to+\infty} \frac{-1}{p} \cdot \ln\left(1 + x^p\right) \quad \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = -\lim_{p\to+\infty} \frac{\frac{1}{1+x^p} \cdot x^p \cdot \ln x}{1} =$$

$= -\ln x \cdot \lim\limits_{p\to+\infty} \dfrac{x^p}{1+x^p} = -\ln x$, (при $0 < x \le 1$ этот предел очевидно равен нулю).

Отсюда, в силу равенства: $y_p(x) = e^{\ln\left(y_p(x)\right)}$, получим требуемое.

Таким образом, условия (10) оказались слабее условий (8), (9) и окончательные достаточные условия «скручиваемости» спирали паутинной модели к равновесной точке (x_0, y_0) в терминах констант Липшица K_f и K_g определяются неравенствами (8), (9) (см. рис.3, *а*).

Заметим, что условия (8), (9) не симметричны относительно констант Липшица функций f и g. Сходимость к равновесной точке гарантирует лишь значение $K_g < 1$, в то время как значение K_f может быть сколь угодно большим (лишь бы значение K_f было «скомпенсировано» достаточной малостью K_g, т.е. выполнением неравенства: $K_f \cdot K_g < 1$).