МОДЕЛЬ ЭКОНОМИКИ С ОБОБЩЕННЫМ РЫНОЧНЫМ СПРОСОМ И ЕДИНСТВЕННЫМ РАВНОВЕСИЕМ[1]

В. К. Горбунов

Данная статья является продолжением статьи автора «Экономическое равновесие и агрегирование покупателей: реабилитация теоремы Вальда» (ЖЭТ. 2011. № 3), где классическая теория общего экономического равновесия пересмотрена на примере модели экономики Касселя — Вальда и на основе авторской концепции о рыночном спросе как об априорном объекте описания рынка. В данной работе модель Касселя — Вальда модифицируется переходом от классического спроса, порождаемого коллективной функцией полезности, к обобщенному рыночному спросу, порождаемому векторным полем предпочтений. Теорема Вальда о существовании и единственности равновесия тривиально переносится на новую модель.

[1] Исследование выполнено при финансовой поддержке аналитической ведомственной целевой программой Минобразования РФ «Развитие научного потенциала высшей школы (2009–2011 годы), проект 2.1.3/6763 «Развитие математических моделей и анализ рыночного спроса и производства».

Введение

В предыдущей статье [10] теория общего экономического равновесия пересмотрена на примере модели Касселя — Вальда и на основе авторской концепции о рыночном спросе как об априорном объекте описания рынка.

В основе классической теории экономического равновесия (ТЭР) Л. Вальраса лежит теория потребительского спроса, понимаемого как зависимость количеств продаж благ (товаров и услуг) некоторого потребительского рынка или всей экономики[2] от их цен и бюджета потребителей. Экономика Вальраса состояла из конечного множества производителей (фирм), независимо максимизирующих свои доходы, и конечного множества потребителей (домохозяйств), выбирающих независимо от других потребителей из множества благ, доступных каждому при данных ценах и бюджете, наиболее «полезный» набор благ. Главное внимание Вальрас и другие современные ему авторы (С. Джевонс и К. Менгер), как и их предшественник Г. Госсен, уделили индивидуальному спросу домохозяйства.

[2] В части благ конечного потребления.

Современная теория индивидуального потребления построена как математическая теория [13, 32, 20]. Содержательное экономическое понятие предпочтения обычно представляется формально как бинарное отношение, определенное на декартовом произведении пространства благ и обладающее некоторыми аксиоматическими свойствами. Классическое бинарное отношение предпочтения (БОП) наделяется базовыми свойствами (аксиомами) полноты, транзитивности и непрерывности, которые обеспечивают существование функционального представления БОП в виде вещественной функции, называемой в математике индикатором бинарного отношения и в экономической теории — порядковой функцией полезности, или функцией предпочтения. Дополнительные аксиомы непрерывности, выпуклости, монотонности и дифференцируемости сужают класс функций предпочтения до непрерывно дифференцируемых вогнутых и возрастающих. Это позволило построить содержательную аналитическую теорию потребительского спроса, позволяющую вычислять и исследовать функции спроса. Вершиной аналитической теории спроса является анализ Е. Слуцкого (1915 г.), лаконично представляющий законы спроса, как ранее открытые эмпирически, так и его новые свойства относительно процессов дополнения и замещения благ при изменении рыночной конъюнктуры — цен благ и суммарных расходов потребителя (сравнительная статика). Однако для решения реальных экономических проблем для производителей благ, торговцев и правительств необходима теория агрегированного рыночного спроса. Свойства рыночного спроса являются определяющими для ТЭР.

Первый теоретический результат относительно существования и единственности экономического равновесия был получен в 1935–1936 гг. австрийским математиком Абрахамом Вальдом [36] на примере модифицированной модели экономики Г. Касселя [14]. В этой модели, в отличие от исходной модели Вальраса, производственная система рассматривается не как множество независимых фирм, а консолидированно, как единая система, использующая ограниченный набор производственных факторов, и потребление представлено не множеством независимых потребителей, максимизирующих субъективные полезности, а обратной функцией рыночного спроса (зависимостью цен от производственного предложения). Вальд нашел условия на функцию рыночного спроса, обеспечивающие как существование, так и единственность равновесия. Ключевым для единственности оказалось условие, позже (1938 г.) переоткрытое П. Самуэльсоном [33] как принцип рационального выбора индивидуального потребителя и названное еще позже слабой аксиомой выявленного предпочтения (слабой АВП). Однако последующие исследователи потребительского спроса и экономического равновесия следовали схеме Вальраса, и основное внимание уделяли теории индивидуального спроса. При этом оказалось, что агрегированный рыночный спрос, рассматриваемый как сумма спросов независимых покупателей, максимизирующих каждый свою функцию предпочтения, невозможно представить аналогичной моделью максимизации коллективной функции предпочтения без наложения искусственных условий (однородность предпочтений или «выпрямление кривых Энгеля») [25; 32, ch. 4]. Так построенный рыночный спрос не удовлетворяет в общем случае условию Вальда — Самуэльсона — слабой АВП.

Вследствие невыполнения слабой АВП для рыночного спроса (как считается до настоящего времени в мэйнстриме теории спроса и экономического равновесия) работа Вальда по обоснованию существования и единственности равновесия в модели экономики Касселя была квалифицирована как несоответствующая реальности. Основополагающей работой в современной ТЭР считается статья К. Эрроу и Д. Дебре [22], где для абстрактной модели децентрализованной конкурентной экономики, объединяющей конечные множества независимых производителей (фирм) конечной номенклатуры благ и независимых потребителей (домохозяйств) с классическими предпочтениями, было доказано существование равновесия. Модель Эрроу — Дебре считается более адекватной реальности, чем модель Касселя — Вальда. Однако единственность равновесия в этой модели, без наложения на индивидуальные предпочтения и распределение доходов между домохозяйствами действительно неестественных предположений, доказать невозможно[1]. Более того, позже были найдены примеры различных патологий относительно множества равновесий и было показано,

[1] Кроме формально предельного случая одного домохозяйства, концептуально соответствующего подходу Касселя и Вальда.

что функция рыночного спроса, порождаемого достаточно большим количеством классически регулярных домохозяйств, может обладать неестественными свойствами (теорема Зонненшейна — Мантеля — Дебре) [32, ch.17]. Более подробно кризисная ситуация теории спроса и равновесия представлена в статьях [8, 10]. Там также представлено решение проблемы агрегирования покупателей в рамках классической теории максимизации функции предпочтения на основе понятия статистического ансамбля потребителей (*statistical consumers' assembly*) как априорного объекта теории спроса и ТЭР, представляемого торговой статистикой [4, 5].

Данная статья предлагает дальнейшее развитие аналитической ТЭР на основе представления рыночного спроса через обобщенную модель спроса, свободную от стеснительных для некоторых рынков предположений классической теории спроса о полноте и (или) транзитивности потребительских предпочтений.

Многие зарубежные исследователи в последние десятилетия предпринимают попытки пересмотра теории спроса на основе отказа от свойств транзитивности и (или) полноты предпочтений. Большинство из них ограничивается теоретико-множественным уровнем без построения аналитического аппарата, позволяющего вычислять спрос [31, 28, 29, 35, 30].

Известны две попытки построения аналитических обобщений классической модели на основе отказа от транзитивности предпочтений. В 1932 г. Р. Аллен [21] предложил теорию локального потребительского выбора на основе представления потребительских предпочтений через «направление предпочтения» (*preference direction*), определенное в каждой точке пространства благ. Это представление можно рассматривать как векторное поле, обладающее специфическими свойствами, однако Аллен и его последователи Н. Георгеску-Роген [24] и Д. Кацнер [27] этого не сделали и не построили содержательную теорию спроса, аналогичную классической теории максимизации полезности.

Вторая аналитическая альтернатива классической модели принадлежит В. Шаферу [34], который предложил теорию индивидуального потребителя на основе полного, но не обязательно транзитивного БОП, представляемого непрерывной и кососимметричной вещественной бифункцией на декартовом произведении пространства благ. Содержательная теория «нетранзитивного потребителя» Шафера также известна. Сравнительному анализу теорий Аллена и Шафера посвящена статья [26].

В наших работах [6, 7, 9] предложена аналитическая модель потребительского спроса, обобщающая классическую теорию спроса для рынков с числом товаров не менее трех и совпадающая с классической теорией рынка двух товаров. Предпочтения потребителей этой модели представляются не бинарным отношением, а векторным полем предпочтений, компоненты которого имеют смысл относительных ценностей благ, а их парные отношения являются предельными нормами замещения соответствующих благ. В потенциальном случае поле предпочтений — это градиентное поле функции предпочтения (потенциала поля предпочтения). При этом новая модель совпадает с классической. В случае непотенциальности поля функция предпочтения, порождающая потребительский спрос, не существует. Это эквивалентно отказу от полноты или транзитивности предпочтений при их представлении бинарным отношением.

Отметим, что понятие «поле предпочтений» использовалось в работах П. Самуэльсона [33], У. Гормана [25], книге Х. Никайдо [17, § 15.2], однако исключительно в рамках классической теории спроса.

Наша модель спроса в своей основе повторяет идею Аллена [21] и развивает ее до аналитической теории, основанной на слабой АВП. Эта теория позволяет вычислять функции спроса, обладающие почти всеми базовыми свойствами классического рыночного спроса, кроме симметричности матрицы Слуцкого. Очевидно, аргументация работ [4, 5, 8, 10] о необходимости отнесения аналитической теории спроса, соответствующей эмпирическим законам, не к индивидуальному, а к агрегированному рыночному спросу, применима также к обобщенной модели.

В данной статье обобщенная модель спроса с представлением предпочтений через векторное поле включается в модель экономического равновесия Касселя — Вальда. Это расширяет область ее применимости и позволяет обосновать существование и единственность равновесия при более слабых предположениях, чем в предыдущей модификации этой модели [10]. В первом разделе кратко представлена обобщенная модель спроса. Второй раздел представляет модификацию модели равновесия Касселя — Вальда, в которой производственная система представлена парой двойственных задач линейного программирования (ЛП), как это впервые сделал Г. Кун в работе [15]. При этом исходная задача ЛП определяет выпуск продуктов системы в зависимости от их цен (предложение производства), а двойственная задача определяет цены производственных факторов в зависимости от цен продуктов. Рыночный спрос в новой модификации представлен обобщенной моделью спроса. В остальном новая модель равновесия повторяет модель [10] с коллективной функцией полезности. Приводятся определение равновесия и теорема существования и единственности. Раздел 3 — заключение.

1. Обобщенная аналитическая модель рыночного спроса

Большинство известных обобщений классической теории (индивидуального) потребительского спроса, кроме отмеченных во введении теорий Аллена [21] и Шафера [34], основано на явном изменении аксиоматики классического БОП. При этом снимается аксиома полноты и (или) транзитивности [31, 28, 29, 35, 30] и вводятся другие аксиомы (рефлексивность, выпуклость и т. д.) и доказывается существование в доступном множестве благ наилучшего набора. Такие теоретико-множественные построения обладают высокой степенью общности, но они не позволяют создать аналитический аппарат для вычислений и анализа спроса и экономического равновесия.

В нашем обобщении классической теории спроса [6, 7, 9], кроме отнесения теории не к индивидуальному потребителю, а к статистическому ансамблю потребителей, вместо исходного представления потребительских предпочтений бинарным отношением используется векторное поле в пространстве благ. Изложим кратко основные понятия и факты новой теории рыночного спроса.

Рассмотрим рынок конечного набора n благ конечного индивидуального потребления, обозначая произвольный набор благ вектором $x = (x_1, \ldots, x_n)$, координаты которого неотрицательны, т. е. $x \in R_+^n$. Неотрицательный ортант R_+^n в таком контексте называется пространством товаров. Система предпочтений ансамбля потребителей рынка представляется с помощью векторного поля $q(x)$ в R_+^n. Все потребители расходуют на покупку данных благ совокупное количество денег e. Мы, в отличие от текстов микроэкономики [32, 20], не ограничиваем смысл этого параметра бюджетом/доходом потребителей, но считаем его в общем случае совокупными расходами потребителей данного рынка. Это значит, что при ценах благ $p = (p_1, \ldots, p_n)$, которые также являются элементами неотрицательного ортанта R_+^n (здесь это пространство цен), выполняется расходное условие покупок

$$\langle p, x\rangle = e. \tag{1.1}$$

Здесь и далее скобки $\langle , \rangle$ используются для скалярного произведения.

Для построения аналитической теории рыночного спроса мы, подобно классической теории [32, 20], использующей непрерывно дифференцируемые функции полезности, ограничиваемся гладкими, т. е. непрерывно дифференцируемыми полями. Это ограничение в силу приближенного характера любой достаточно нетривиальной теории, а также приближенности исходных данных, используемых для идентификации соответствующей математической модели, не является, как правило, стеснительным.

Представление системы предпочтений ансамбля потребителей через векторное поле по существу повторяет представление Алленом предпочтений индивидуального потребителя через направление предпочтений [21]. Однако мы используем также базовые характеристики векторных полей — потенциальность и монотонность [18]. Поле $q(x)$ называется потенциальным, если существует такая скалярная дифференцируемая функция $u(x)$, называемая потенциалом поля, что $q_i(x) = \partial u(x)/\partial x_i$. Неотрицательность компонент $q_i(x)$ означает неубывание потенциала. Поле $q(x)$ называется монотонно невозрастающим, если для любых точек x и y выполняется неравенство

$$\langle q(x) - q(y), x - y\rangle \leq 0. \tag{1.2}$$

Если это неравенство для $x \neq y$ строгое, то поле называется монотонно убывающим. В общем случае поле предпочтений может быть непотенциальным. Потенциал $u(x)$ монотонно невозрастающего поля $q(x)$ (если существует) является вогнутой функцией.

Свойства потенциальности и монотонности поля $q(x)$ определяются матрицей ее производных

$$Q(x) = \frac{\partial q(x)}{\partial x}. \tag{1.3}$$

Потенциальность поля $q(x)$ эквивалентна симметричности этой матрицы [18, теорема

4.1.6]. Монотонное невозрастание (1.2) поля $q(x)$ эквивалентно отрицательной полуопределенности матрицы $Q(x)$, и если эта матрица отрицательно определенная[1], то $q(x)$ строго монотонно убывает [18, теорема 5.4.3].

Определение 1 [6]. Векторным полем потребительских предпочтений называется монотонно невозрастающее непрерывное отображение $q: R^n_+ \to R^n_+$, компоненты которого $q_i(x)$ имеют смысл относительных ценностей товаров $i = \overline{1, n}$, а их отношения

$$S_{ij}(x) = \frac{q_i(x)}{q_j(x)} \tag{1.4}$$

являются предельными нормами замещения[2] товара j товаром i.

Если поле предпочтений $q(x)$ потенциальное, то его потенциал $u(x)$ можно считать порядковой функцией полезности. Соответственно, компоненты $q_i(x)$ принимают смысл классических предельных полезностей, и свойство монотонного убывания поля соответствует первому закону Госсена классической теории — закону убывания предельной полезности.

Рациональность выбора потребителей определяется в соответствии со вторым законом Госсена, представляющим в классическом случае принцип оптимальности (равновесие в потреблении). В нашем случае этот принцип также сохраняется в хиксовой форме: в точке спроса предельные нормы замещения $S_{ij}(x)$ равны отношению соответствующих цен [5, п. 2.3]:

$$S_{ij}(x) = \frac{p_i}{p_j} \tag{1.5}$$

Так как предельные нормы замещения равны отношениям (1.4), то принцип равновесия в потреблении (1.5) можно представить как коллинеарность поля $q(x)$ вектору цен р, т. е. равенством

$$q(x) = \lambda p, \tag{1.6}$$

где λ — положительный коэффициент пропорциональности векторов $q(x)$ и p.

Равенство (1.6) — это система n уравнений относительно неизвестных n координат точки спроса x и коэффициента λ. Для замыкания этой системы n уравнений относительно $n + 1$ неизвестных следует использовать также расходное условие (1.1).

Таким образом, итоговая форма соотношений, определяющих рациональный выбор ансамбля потребителей, расходующих на данном рынке в ценовой ситуации p суммарное количество денег e, т. е. определяющих рыночный спрос $x(p, e)$, принимает вид системы $n + 1$ нелинейных уравнений относительно такого же числа переменных $(x_1, \ldots, x_n, \lambda)$:

$$\begin{cases} q_i(x) - \lambda p_i = 0, \ i = \overline{1, n}, \\ \langle p, x \rangle - e = 0. \end{cases} \tag{1.7}$$

Эта система нелинейных уравнений представляет новую, обобщенную модель рационального потребительского выбора. Новая теория спроса, соответствующая этой модели, сохраняет классические законы Госсена в обобщенном смысле. В случае потенциальности поля система (1.7) совпадает с характеристической системой классической модели [5, с. 65]. Множитель $\lambda(p, e)$, определяемый вместе с $x(p, e)$ этой системой, является обобщением множителя Лагранжа классической модели спроса, трактуемого как предельная полезность потребительских расходов [20].

Существование и свойства решения системы (1.7) относительно переменных (x, λ) определяются свойствами ее соответствующего якобиана

$$J_{x\lambda} = \begin{bmatrix} Q(x) & -p^T \\ p & 0 \end{bmatrix}. \tag{1.8}$$

В [7, 9] показано, что в общем непотенциальном случае система (1.7) с невырожденным якобианом (1.8) определяет при заданных ценах $p > 0$ и расходах $e > 0$ в некоторой области $\Omega \subset R^{n+1}_+$ значения спроса $x(p, e) > 0$ и масштабного множителя $\lambda(p, e) > 0$ и позволяет исследовать их свойства. Как и в классическом случае, функции обобщенного спроса однородны нулевой степени, т. е. λ любого числа $\alpha > 0$ выполняется равенство $x(\alpha p, \alpha e) = x(p, e)$.

Для построения содержательной теории спроса требуется его регулярность, что означает его однозначность и непрерывную дифференцируемость векторной функции $x(p, e)$. Достаточным условием регулярности является отрицательная определенность матрицы (1.3), обеспечивающая монотонное убывание поля $q(x)$ и обратимость якобиана (1.8). В регулярном

---

[1] Алгебраическая определенность несимметричной матрицы Q эквивалентна определенности симметричной матрицы $Q + Q^T$.

[2] Понятие «предельной нормы замещения» введено Дж. Хиксом как исходное представление предпочтений.

случае для спроса $x(p, e)$ определена матрица замещения (*substitution matrix*) [32, p. 33-34]

$$S(p,e) = \left\{ \frac{\partial x_i(p,e)}{\partial p_j} + \frac{\partial x_i(p,e)}{\partial e} x_j(p,e), \quad i,j=\overline{1,n} \right\} \quad (1.9)$$

построенная и исследованная впервые Е. Е. Слуцким в работе [19][1].

Для модели (1.7) с невырожденной матрицей $Q(x)$ матрица Слуцкого (1.9) имеет вид

$$S(p,e) = \lambda(p,e) Q^{-1}(x(p,e)) \left[I_n - \frac{pp^T Q^{-1}}{p^T Q^{-1} p} \right] \quad (1.10)$$

Эта формула является обобщением соответствующей формулы классической модели, где матрица производных поля предпочтения (1.3) является матрицей вторых производных (матрицей Гессе) функции полезности [1, 5].

Известно, что матрица Слуцкого (1.9) спроса $x(p, e)$, порождаемого классической моделью, симметричная и отрицательно полуопределенная, причем ее нуль-пространство порождается вектором цен p. Выразим это формально, с использованием правила матричных умножений, где векторы x, p и другие векторы из R^n считаются столбцами, а их транспозиции x^T, p^T — строками: $S^T(p, e) = S(p, e)$, $v^T S(p, e) v \leq 0$ для любых $v \in R^n$, причем $v^T S(p, e) v = 0$ тогда и только тогда, когда $v = \alpha p$, где α — произвольное число. Для обобщенного спроса, порождаемого регулярным полем $q(x)$, матрица (1.10) сохраняет почти все эти свойства, кроме симметричности.

Как и в классической модели спроса, представление потребительских предпочтений в обобщенной модели также неоднозначно. Здесь имеет место инвариантность поля предпочтений $q(x)$ относительно умножений на положительную скалярную функцию $\alpha(x)$, сохраняющую монотонность поля. Это значит, что если поле $q(x)$ порождает функцию спроса $x(p, e)$ и некоторый множитель $\lambda(p, e)$, то эта же функция спроса порождается полем $q_\alpha(x) = \alpha(x)q(x)$ при любой положительной функции $\alpha(x)$, сохраняющей для поля q_α свойство (1.2). При этом, однако, будет новый множитель $\lambda_\alpha(p, e) = \alpha(x)\lambda(x)$.

Для теории экономического равновесия, как отмечено во введении, особую роль играет слабая аксиома выявленного предпочтения. В терминах функций спроса эта аксиома означает ([32, def. 2.F.1]):

для любых двух ситуаций «цены — расходы» (p, e) и (p', e') выполняется:

$$\text{если } \langle p, x(p', e')\rangle \leq e \text{ и } x(p', e') \neq x(p, e), \quad \text{то } \langle p', x(p, e)\rangle > e'. \quad (1.11)$$

В [7, с. 42] показано, что обобщенный спрос модели (1.7) с непрерывно дифференцируемым и монотонно убывающим полем $q(x)$ удовлетворяет слабой АВП.

Напомним, что теория выявленного предпочтения была предложена Самуэльсоном и привлекла внимание многих исследователей как альтернатива классической теории спроса в связи с трудностями последней относительно идентификации (калибровки) модели максимизации функции предпочтения, т. е. трудностями построения коллективной функции предпочтения по торговой статистике, в частности, вызванными методологической проблемой агрегирования покупателей. Важное внимание уделялось также проблеме интегрируемости данных функций спроса. Под этим понимается вопрос: каким аналитическим свойствам должна удовлетворять функция спроса $x(p, e)$, чтобы существовала функция предпочтения $u(x)$, порождающая данный спрос? Оказалось (в работах Л. Гурвиц и Х. Удзава, 1971), что критерием интегрируемости регулярного спроса $x(p, e)$ является выполнение трех свойств:

1) однородность нулевой степени,
2) закон Вальраса, т. е. выполнение тождества $\langle p, x(p, e)\rangle = e$ для любых ситуаций $(p, e) > 0$,
3) симметричность и отрицательная полуопределенность матрицы Слуцкого.

Попытки построения обобщенной теории спроса на основе слабой АВП выявили [28], что регулярные функции спроса, удовлетворяющие слабой аксиоме, должны удовлетворять почти всем этим трем свойствам классического спроса, кроме симметричности матрицы Слуцкого. Спрос, порождаемый нашей моделью (1.7), именно такой. Таким образом, новая модель, основанная на представлении предпочтений векторным полем, которое может быть непотенциальным, соответствует теории потребительского спроса, построенной на основе слабой АВП.

2. Модель Касселя — Вальда с векторным полем коллективных предпочтений

В модели экономического равновесия Касселя [14, 36] производственная система, состоящая

[1] Оригинал опубликован на итальянском языке в 1915 г.

изначально из независимых конкурирующих фирм, максимизирующих свои доходы при общих ценах, рассматривается консолидированно. В соответствии с одной из гипотез Вальраса, подтвержденных позже математическим анализом моделей равновесия, продажные цены продуктов в условиях совершенной конкуренции и равновесия (спроса и предложения) равны их себестоимости. При этом совокупное предложение производителей эквивалентно предложению консолидированной производственной системы, максимизирующей совокупный доход (см. [3, гл. 3, §5; 1, с. 134]). Это позволило Г. Куну описать рациональность производственной системы замкнутой децентрализованной рыночной экономики задачей линейного программирования [15], естественной для централизованной плановой экономики. Очевидно, ничто не мешает считать, что предлагаемая ниже модель представляет также более реальную смешанную экономику с общими рыночными ценами.

В экономике Касселя рассматривается m факторов производства в положительных количествах $r \in E^m_{++} \equiv \left\{ r \in E^m : r_i > 0, i = \overline{1,m} \right\}$, которые используются для производства n конечных продуктов (благ) в неотрицательных количествах $x \in E^n_+$. Для производства единицы продукта j требуется $a_{ij} \geq 0$ единиц фактора i. Эти коэффициенты определяют удельные производственные затраты факторов и составляют технологическую матрицу $A = \{a_{ij}\}$ размерностей ($m \times n$). Эта матрица и вектор наличных факторов r определяют ограничения на выпуск продуктов x — систему линейных неравенств:

$$Ax \leq r, x \geq 0. \tag{2.1}$$

Цены продуктов составляют вектор $p \in E^n_+$ и цены факторов — вектор $v \in E^m_+$.

Бюджет потребителей равен стоимости факторов $\langle v, r \rangle$.

Рациональность производственной системы заключается в максимизации стоимости выпуска x в ценах p, т. е. линейной функции $\langle p, x \rangle$, при условиях (2.1). Решение этой задачи ЛП, возможно не единственное, определяет многозначное отображение

$$X(p) = Arg \max_x \left\{ \langle p, x \rangle : Ax \leq r,\ x \geq 0 \right\}. \tag{2.2}$$

Отображение $X(p)$ является производственным предложением благ.

Связь цен благ p и цен факторов v, соответствующих определению Вальраса конкурентного равновесия, а также другие содержательные свойства равновесия устанавливаются теорией двойственности ЛП. Рассмотрим двойственную к (2.2) задачу, используя (пока формально) для двойственных переменных, отвечающих факторным ограничениям $Ax \leq r$, цены факторов v:

$$V(p) = Arg \min_v \left\{ \langle r, v \rangle : A^T v \geq p, v \geq 0 \right\}. \tag{2.3}$$

Излагаемые далее факты теории двойственности подтверждают совпадение двойственных переменных и цен факторов.

Согласно первой теореме двойственности задачи (2.2) и (2.3) разрешимы или неразрешимы одновременно, и в случае разрешимости оптимальные значения целевых функций (т. е. значения этих задач) совпадают:

$$\langle p, x \rangle = \langle r, v \rangle \equiv \langle v, r \rangle. \tag{2.4}$$

По второй теореме двойственности (теореме равновесия) пара решений (x, v) двойственных задач (2.2) и (2.3) удовлетворяет условиям дополнительности:

$$v_i \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j - r_i \right) = 0,\ i = \overline{1,m};$$

$$\left(\sum_{i=1}^m v_i a_{ij} - p_j \right) x_j = 0, j = \overline{1,n}. \tag{2.5}$$

Первая группа этих условий показывает, что двойственные переменные v_i, соответствующие не полностью используемым факторам r_i (когда $\sum_j a_{ij} x_j < r_i$), должны быть нулевыми. Этим свойством обладают вальрасовы цены факторов. Второе свойство цен Вальраса — равенство цен p_j выпускаемых продуктов ($x_j > 0$) себестоимости, т. е. $p_j = \sum_i v_i a_{ij}$, где v_i — цены факторов. Это согласуется со второй группой условий (2.5). При этом выпуск продукта x_j, цена которого p_j ниже себестоимости, также нулевой.

Таким образом, двойственные переменные v задачи (2.3) действительно являются вальрасовыми ценами факторов r, или ценами конкурентного равновесия. При этом равенство двойственности (2.4) является стандартной формой закона Вальраса, означающего, что потребители расходуют весь совокупный бюджет $\langle v, r \rangle$. Формирование этого бюджета зависит от институциональных характеристик данной экономики, но это несущественно для вопроса оптимального ценообразования, решаемого теорией равновесия.

Следствием первой теоремы двойственности также является эквивалентность решения пары двойственных задач (2.2), (2.3) и решения системы линейных неравенств

$$Ax \leq r, x \geq 0, A^T v \geq p, v \geq 0, \langle p, x\rangle = \langle r, v\rangle \quad (2.6)$$

относительно пары (x, v) при заданных ценах p.

Перейдем к описанию рыночного спроса. В нашей работе [10] рыночный спрос описывается классической задачей максимизации коллективной порядковой функции полезности на доступном множестве, определяемом ценами благ p и совокупными расходами e всех потребителей исследуемого рынка. Теперь вместо классической теории спроса будем использовать обобщенную теорию, представляемую моделью рыночного спроса (1.7). При этом общая стоимость покупок e, как и в любом варианте экономики Вальраса, совпадает с консолидированным бюджетом всех потребителей, который равен стоимости факторов производства r в ценах v, т. е.

$$e = \langle v, r\rangle \quad (2.7)$$

Таким образом, новая модель замкнутой экономики состоит из описания агента «потребление» — системой (1.7), агента «производство» задачей ЛП (2.2) и бюджетным равенством (2.7). При этом двойственная задача (2.3) определяет цены факторов v в зависимости от цен производимых благ p. Задача равновесия ставится относительно цен (p, v) и выпуска благ x. Величина выпуска x является, как и в исходной модели Касселя, одновременно потребительским спросом и производственным предложением, что соответствует сути понятий рыночного и экономического равновесия.

Комплексную задачу равновесия, состоящую из двух (двойственных) задач ЛП (2.2) и (2.3), а также из систем уравнений (1.7), определяющих спрос, и бюджета (2.7), удобно также рассматривать в эквивалентной, но концептуально и алгоритмически более простой форме — как систему равновесия, состоящую из равенств и неравенств (1.7), (2.6), (2.7), которая после исключения параметра расходов e принимает вид:

$$\begin{cases} q(x) - \lambda p = 0, \\ \langle p, x\rangle - \langle v, r\rangle = 0, \\ Ax \leq r, \quad x \geq 0, \\ A^T v \geq p, \quad v \geq 0. \end{cases} \quad (2.8)$$

Остановимся на известном для моделей равновесия замкнутых экономик свойстве цен — инвариантности решений систем равновесия относительно масштаба цен. Легко увидеть, что эта инвариантность сохраняется и для новой модели. Действительно, предположим, что тройка (p, v, x) удовлетворяет системе равновесия (2.8). Очевидно, что этой же системе удовлетворяет также тройка $(\alpha p, \alpha v, x)$ с любым положительным множителем α (при несущественном масштабировании множителя $\alpha\lambda$). Для исключения неопределенности масштаба цен (несущественной для проблемы равновесия) следует наложить дополнительное условие на цены. Наиболее удобное условие — принадлежность цен стандартному симплексу в объединенном пространстве цен R_+^{n+m}:

$$\sum_{j=1}^{n} p_j + \sum_{i=1}^{m} v_i = 1, \; p \geq 0, \; v \geq 0. \quad (2.9)$$

Альтернативным условием для цен является назначение единичной цены некоторому продукту j или фактору производства i.

Формальное определение равновесия для новой модели по существу повторяет наше предыдущее определение [10] варианта модификации модели Касселя — Вальда — Солоу с классическим спросом.

Определение 2. Набор продуктов, цен продуктов и цен производственных факторов $\{x^*, p^*, v^*\}$ составляет рыночное равновесие в экономике (2.8), (2.9), если

$$x^* = x(p^*, \langle v^*, r\rangle) \in X(p^*). \quad (2.10)$$

Коллективная рациональность потребителей здесь выражена равенством, а рациональность производства — включением. Закон Вальраса выполняется тривиально в силу расходного равенства (1.1), входящего в систему (2.8) второй строкой. Вопрос существования и единственности равновесия в новой, обобщенной модели Касселя — Вальда решается следующей теоремой.

Теорема. Пусть в замкнутой экономике (2.8), (2.9) технологическая матрица A не содержит нулевых столбцов и нулевых строк, и поле предпочтений $q(x)$ дифференцируемо и монотонно убывающее. Тогда существует экономическое равновесие $\{x^*, p^*, v^*\}$, в котором набор продуктов и их цены $\{x^*, p^*\}$ определены однозначно, и если при этом ранг матрицы A равен числу факторов m, то цены факторов v^* также определены однозначно.

Замечание. Предположение об отсутствии нулевых строк и столбцов в матрице A означает, что производство каждого продукта требует использования некоторого фактора, и каждый фактор используется в производстве некоторого продукта. Это предположение обеспечивает ограниченность допустимого множества (2.1) производственной задачи (2.2), следовательно, ее разрешимость, а также разрешимость двойственной задачи (2.3), определяющей цены факторов v, при любых ценах благ $p \in E^n_+$.

Сформулированная теорема существования и единственности равновесия в предложенной модификации модели экономики Касселя — Вальда не нуждается в новом доказательстве, как и аналогичная теорема предыдущей работы [10]. В части существования равновесия здесь также можно почти дословно повторить доказательство теоремы 2.1 из [1, с. 142-146]. Единственность равновесия для линейной модели производства (2.2) легко выводится из импликации (2.11) слабой АВП (см. [10, с. 141]), которая выполняется для спроса $x(p, \langle v, r\rangle)$ в силу дифференцируемости и монотонного убывания поля $q(x)$.

Заключение

Эта статья завершает (на данном этапе) модификацию модели общего экономического равновесия Вальраса — Касселя[1] и, на этом примере, общего подхода к проблеме экономического равновесия, предложенного в предыдущей статье [10], в двух направлениях. Во-первых, обосновано описание рыночного спроса, свойства которого определяют существование, единственность равновесия и устойчивость процесса его «нащупывания»[2], как коллективного спроса статистического ансамбля потребителей — исходного объекта теории спроса. Это позволило пересмотреть работы Вальда, представленные в его обзорной статье [36], в которых впервые были доказаны существование и единственность равновесия в данной модели, и показать естественность его ключевого условия, названного позже слабой АВП, для рыночного спроса (однако не обратного спроса Касселя, а спроса Вальраса — Маршалла, т. е. зависимости количеств продаж продуктов от их цен). Это условие, как давно известно, обеспечивает (при некоторых дополнительных и естественных условиях) единственность равновесия. Ошибочное отрицание условия Вальда для рыночного спроса было «камнем преткновения» для развития ТЭР и ее практического применения.

Второе направление модификации модели Касселя — Вальда — это переход от классической модели спроса (однако примененной не к индивидуальному, а к рыночному спросу) к обобщающей ее модели, основанной на представлении коллективных предпочтений векторным полем, в общем случае непотенциальным. Новая модель (2.8) (и ее теория) описывает потребительский спрос при менее стеснительных предположениях, чем классическая модель, и сохраняет выполнение для обобщенного спроса слабой АВП.

Модель Касселя — Вальда считается существенным упрощением реальности из-за консолидированного рассмотрения как производственных агентов-фирм, так и потребителей. Относительно последнего упрека, теперь мы считаем очевидным, что это главное достоинство подхода авторов этой модели, позволившее, через определенное время, преодолеть парадоксы и тупики теории равновесия, основы которых были заложены ошибочной схемой Вальраса представления рыночного спроса через детальное, но неадекватное реальности аналитическое описание независимых индивидуальных потребителей.

Консолидированное представление производства стационарной линейной моделью действительно может показаться большим упрощением. Но модель производства Касселя предвосхитила создание весьма богатой и эффективной для приложений теории линейных экономических моделей и линейного программирования [3, 23]. В частности, соотношения двойственности (2.4) и (2.5) были представлены в описании этой модели задолго до создания теории ЛП. Линейное представление производства позволяет решить проблему идентификации модели по стандартной экономической статистике. При этом также требуется идентифицировать и блок потребления. Для этого имеются и развиваются соответствующие методы построения коллективной функции полезности [5, 12] и поля предпочтения [11].

Таким образом, проведенная модификация модели Касселя — Вальда позволяет относить

[1] Исходное название модели, названной после ее модификации и исследования Вальдом, моделью Касселя — Вальда.

[2] Мы предполагаем посвятить проблеме устойчивости специальную публикацию.

ее к классу прикладных вычислимых моделей равновесия [16], представляющих экономики с любой степенью централизации управления. Такие модели очень актуальны для решения проблем оптимального ценообразования, решение которых позволило бы вырабатывать эффективную экономическую политику, отвечающую национальным интересам, а не интересам «эффективного использования ресурсов мировой экономикой».

Наконец, отметим, что основополагающая в настоящее время для ТЭР модель Эрроу — Дебре также может быть пересмотрена на основе предложенных нами: концепции рыночного спроса и представления предпочтений векторным полем. Такой пересмотр достаточно прост, так как формально заключается в представлении потребления одним агентом. Следует лишь именовать его не «домохозяйством», а «ансамблем потребителей» данной экономики. При этом снимается искусственное предположение о наличии у каждого домохозяйства в собственности всех продуктов экономики [1, с. 137]. Для ансамбля потребителей такое предположение естественно. Существование равновесия тривиально переносится на такую модификацию модели Эрроу — Дебре. Проблема единственности равновесия в этой модели исследована в специальной литературе и представлена в популярном за рубежом и в некоторых российских «экономических школах» учебнике [32]. Там можно найти формальные результаты относительно единственности равновесия при выполнении слабой АВП, которая считается до настоящего времени «искусственной» для рыночного спроса, используемого в модели Касселя — Вальда априорно.

Список источников

1. *Ашманов С. А.* Математическая экономика. — М.: Наука, 1984.

2. *Вальрас Л.* Элементы чистой политической экономии. — М.: Изограф, 2000 (ориг. — 1874-77).

3. *Гейл Д.* Теория линейных экономических моделей. — М.: ИЛ, 1963 (ориг. 1960).

4. *Горбунов В. К.* Математическая модель потребительского спроса: учебное пособие. — Ульяновск: Изд-во УлГУ, 2001.

5. *Горбунов В. К.* Математическая модель потребительского спроса: Теория и прикладной потенциал. — М.: Экономика, 2004.

6. *Горбунов В. К.* Обобщенная модель потребительского спроса // Стратегическое планирование и развитие предприятий: Тезисы докл. и сообщ. Шестого Всеросс. симп. / Секция 2. Под ред. проф. Г. Б. Клейнера. — М.: ЦЭМИ РАН, 2005.

7. *Горбунов В. К.* Обобщенная модель потребительского спроса и выявленное предпочтение // Труды Средневолжского математического общества. — 2007. — № 2. Т. 9.

8. *Горбунов В. К.* Особенности агрегирования потребительского спроса // Журнал экономической теории. 2009. — № 1. — С. 85-94.

9. *Горбунов В. К.* Модель потребительского спроса, основанная на векторном поле предпочтений // Вестник Моск. ун-та. Сер. 6. Экономика. — 2009. — №1.

10. *Горбунов В. К.* Экономическое равновесие и агрегирование покупателей: реабилитация теоремы Вальда // Журнал экономической теории. — 2011. — №3. — С. 130-143.

11. *Горбунов В. К., Ледовских А. Г.* Построение поля потребительских предпочтений по торговой статистике // Журнал Средневолж. матем. общества. — Саранск: СВМО. — 2010. — Т.12, №4.

12. *Горбунов В. К., Ледовских А. Г.* Построение дифференцируемых функций полезности по торговой статистике // Труды XV Байкальской международной школы-семинара «Методы оптимизации и их приложения». — Иркутск: РИО ИДСТУ СО РАН, — 2011. — Т. 6.

13. *Интриллигатор М.* Математические методы оптимизации и экономическая теория. — М.: Прогресс, 1975 (ориг. 1971).

14. *Кассель Г.* Основные идеи теоретической экономии. — М.–Л., 1929 (нем. ориг. — 1918).

15. *Кун Г. У.* Об одной теореме Вальда // Кун Г.У., Таккер А.У. (Редакторы) Линейные неравенства и смежные вопросы. — М.: Иностр. лит., 1958 (англ. ориг. — 1956). С. 363-371.

16. *Макаров В. Л., Бахтизин А. Р., Сулакшин С. С.* Применение вычислимых моделей в государственном управлении. — М.: Научный эксперт, 2007.

17. *Никайдо Х.* Выпуклые структуры и математическая экономика. — М.: Мир, 1972 (ориг. 1968).

18. *Ортега Дж., Рейнболдт В.* Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными. — М.: Мир, 1975 (ориг. 1970).

19. *Слуцкий Е. Е.* К теории бюджета потребителя (итал. ориг. 1915) // Слуцкий Е. Е. Экономические и статистические произведения: Избранное. — М.: Эксмо, 2010.

20. *Черемных Ю. Н.* Микроэкономика. Продвинутый уровень. — М.: Инфра-М, 2008.

21. *Allen R. G.* D. The foundation of a mathematical theory of exchange // Economica. — 1932. — V. 12.

22. *Arrow K. J., Debreu G.* Existence of an equilibrium for a competitive economy // Econometrica. — 1954. — Vol. 22. P. 265-290.

23. *Dorfman R., Samuelson P., Solow R.* Linear Programming and Economic Analysis. NY: McGraw-Hill, 1958.

24. *Georgescu-Roegen N.* Choice and revealed preference // Southern Economic J. — 1954. — № 2. — P. 119-130.

25. *Gorman W. M.* Community preference fields // Econometrica. 1953. V.21, №1.

26. *John R.* Local and Global Consumer Preferences // Generalized Convexity and Relative Topics. LNEMS. — Berlin: Springer, 2007.

27. *Katzner D. W.* Demand and exchange analysis in the absence of integrability conditions // Preference, Utility and Demand. Ed. by J.S. Chipman et al. — New York: Harcourt, Brace, Jovanovich, 1971. — Ch. 10.

28. *Kihlstrom R.*, Mas-*Colell A.*, *Sonnenschein H.* The Demand Theory of the Weak Axiom of Revealed Preference // Econometrica. — 1976. — No. 5, Vol. 44.

29. *Kim T.*, *Rihter M. K.* Nontransitive-nontotal consumer theory // J. Econ. Theory. 1986. V.38. No. 2.

30. *Mariotti M.* What kind of preference maximization does the weak axiom of revealed preference characterize? // Economic Theory. — 2008. Vol. 35.

31. Mas-*Colell A.* An equilibrium existence theorem without complete and transitive preferences // J. Mathematical Economics. — 1974. Vol. 1.

32. Mas-*Colell A.*, *Whinston M.*, *Green J.* Microeconomic Theory. — N.Y.: Oxford Univ. Press.? 1995.

33. *Samuelson P. A.* A note on the pure theory of consumer's behaviour // Economica, New Series. — 1938. — Vol. 5. № 17.

34. *Shafer W. J.* The nontransitive consumer // Econometrica. — 1974. — Vol. 42.

35. *Quah J. K-H.* Weak axiomatic demand theory // Economic Theory. — 2006. — Vol. 29.

36. *Wald A.* (1936): On some systems of equations of mathematical economics // Econometrica. — 1951. — Vol. 19. — P. 368-403 (нем. ориг. — 1936 г.).

УДК 330.36.01; 519.865.3

ключевые слова: существование и единственность равновесия, модель Касселя — Вальда, слабая аксиома, поле предпочтений, непотенциальный рыночный спрос