УДК 659.519.2

ОЦЕНКА ОХВАТА АУДИТОРИИ И РИСКОВ РАЗМЕЩЕНИЯ РЕКЛАМЫ В ТЕОРИИ МЕДИАПЛАНИРОВАНИЯ

Г. А. Шматов

В настоящей статье развивается экономико-математическая теория медиапланирования. В рамках этой теории дается определение понятия риска размещения рекламы в СМИ, приводится методика его вычисления. Представлены зависимости рисков размещения рекламы от числа размещений. Вычисление рисков осуществлялось с помощью как аналитических, так и численных методов. В статье приводится доказательство рекуррентного соотношения для охвата аудитории, вводится распределение вероятностей для случайной величины — числа контактов с медиа, вычисляется математическое ожидание и дисперсия этой случайной величины, приводится сравнение результатов точного и приближенного вычисления эффективного числа размещений рекламы. Полученные результаты могут использоваться при планировании реальных рекламных кампаний.

Ключевые слова: медиапланирование, эффективный охват аудитории, спектр охвата, риск, оптимизация, эффективность рекламы

1. Проблематика, актуальность и степень изученности темы исследования

В работах [21, 23] изложены основы экономико-математической теории медиапланирования, позволяющей решать задачи оптимизации размещения коммерческой рекламы на конкурентном потребительском рынке. Одним из основных концептов этой теории является метод вычисления охвата целевой аудитории в зависимости от числа размещений рекламы в СМИ. Этот метод основан на бинарной модели, предполагающей наличие двух непересекающихся сегментов аудитории медиа: случайной аудитории, каждый представитель которой осуществляет контакты с медиа случайным образом, и постоянной аудитории, представители которой контактируют с медиа на постоянной основе. Каждая из этих аудиторий характеризуется двумя измеряемыми параметрами — вероятностями контактов с одним и бесконечно большим числом медиасобытий. В работе [21] приведен вывод формулы для вычисления охвата аудитории, основанный на рекуррентном соотношении, справедливость которого установлена, но в этой и следующих работах (см. [23, 13, 14]) строго не доказана. При этом в работах [21, 23, 14] аудитория медиа считается состоящей из одного сегмента — случайной аудитории, а в работах [13, 19, 20] рассматриваются два сегмента — случайная и постоянная аудитории (бинарная модель). В настоящей статье приводятся: формально более строгое, чем в предшествующих работах, доказательство рекуррентного соотношения для охвата аудитории, вывод формулы вычисления охвата аудитории в зависимости от числа размещений рекламы, вывод формул для математического ожидания и дисперсии случайной величины — числа контактов с медиасобытиями. Проведено сравнение результатов точного и приближенного вычисления эффективного числа размещений рекламы, позволяющего контролировать риски размещения рекламы, связанные с тем или иным уровнем эффективности рекламного воздействия.

2. Рекуррентное соотношение для охвата аудитории

Для описания зависимости охвата аудитории от числа размещений рекламы в бинарной модели используется биномиальное распределение вероятностей для двух сегментов аудитории — постоянной и случайной. Выбор типа распределения вероятностей в бинарной модели обусловлен соответствием определения спектра охвата аудитории условиям справедливости схемы Бернулли. Отметим, что качественные и количественные различия зависимостей спектров охвата от числа контактов описываются в бинарной модели совершенно естественным образом, а именно, варьированием величины двух параметров модели для каждого вида аудитории — вероятностей контактов при одном и бесконечно большом числе размещений рекламы. Величина этих параметров для каждого сегмента аудитории, как показывают медиаисследования, оказывается существенно различной. Например, вероятность контактов с рекламой при одном ее размещении на каком-либо телеканале составляет для случайной аудитории величину от нескольких до двух десятков процентов, а для постоянной аудитории может достигать величин более 90 %.

Поскольку оба сегмента аудитории описываются одним типом распределения вероятностей, в дальнейшем при выводе формулы для вычисления охвата аудитории можно без потери общности ограничиться рассмотрением только одного сегмента, например, случайной аудитории. Для другого сегмента — постоянной аудитории — все приведенные ниже выкладки являются полностью аналогичными, различие состоит только в величине параметров модели. Таким образом, далее рассматривается один сегмент аудитории медиа — случайная аудитория.

Сформулируем определения основных понятий — *медиасобытия*, *рейтинга* медиасобытия, *охвата* аудитории, которые необходимы для дальнейшего изложения (подробнее см. работы [21, 23, 14, 13, 19]). В широком смысле медиасобытием можно назвать такое, которое состоит в контакте представителя целевой аудитории с тем или иным медиа. В рассматриваемом контексте интерес представляют любые медиа, которые используются для размещения рекламы. Для медиа каждого типа можно дать свое, более конкретное определение медиасобытия. Так, для прессы медиасобытием назовем выход номера (выпуска) печатного издания (газета, журнал), для телевидения и радио — эфирное событие, относящееся к любому фиксированному промежутку времени в сетке суточного вещания теле- или радиоканала, для носителей наружной рекламы — наличие той или иной конструкции в определенном месте в течение суток (билборд, перетяжка и др.), для Интернета — наличие в сети страницы какого-либо сайта в течение суток и т. д. Медиасобытия являются однотипными, если их параметры одинаковы (например, на любом телеканале однотипны медиасобытия, связанные с эфирными событиями определенной длительности на этом телеканале, начинающимися в определенное время суток по будням или выходным). Параметры медиасобытия зависят от той или иной модели, в рамках которой это медиасобытие определяется и измеряется. В рамках односегментной модели аудитории медиа имеются два измеряемых параметра медиасобытия (см. [21, 23, 14]), в рамках бинарной модели аудитории имеются 4 измеряемых параметра каждого медиасобытия (см. [13, 19, 20]).

Пусть m — число медиасобытий, связанных с размещением рекламы. Тогда охватом $G(m)$ назовем долю целевой аудитории, имевшей хотя бы один контакт с медиа за m однотипных медиасобытий.

Рейтинг R — средняя доля целевой аудитории, имевшей контакт с одним медиасобытием (одним размещением рекламы). Предельный охват G^{∞} — доля целевой аудитории, имевшей контакт хотя бы с одним медиасобытием при сколь угодно большом числе однотипных медиасобытий.

Используя эргодическую гипотезу, согласно которой усреднение по ансамблю эквивалентно усреднению по времени (см., напр.: [9, с. 592]), понятие рейтинга, предельного охвата и охвата можно сформулировать на языке теории вероятностей.

Определение 1. Рейтинг R — это вероятность того, что случайно выбранный из целевой аудитории человек имел контакт с одним медиасобытием (рекламой).

Определение 2. Предельный охват G^{∞} — вероятность того, что случайно выбранный из целевой аудитории человек имел хотя бы один контакт с медиасобытием при сколь угодно большом числе медиасобытий.

Определение 3. Охват $G(m)$ — это вероятность того, что случайно выбранный из целевой аудитории человек имел хотя бы один контакт с медиасобытием при условии, что произошло m медиасобытий (m размещений рекламы).

Назовем событием E_k осуществление хотя бы одного контакта представителя случайной аудитории медиа с k-м по счету медиасобытием. Далее рассмотрим не все события E_k, а только те, которые соответствуют условию, что контакт осуществлен представителями не всей аудитории данного медиа, а только относящимися к рассматриваемой целевой аудитории. Событием A_k назовем осуществление хотя бы одного контакта любого человека из целевой аудитории с k-м по счету медиасобытием, при этом вероятность этого события

$$P(A_k) = R. \qquad (1)$$

События A_k и E_k связаны следующим соотношением: $A_k = DE_k$, где D — событие, заключающееся в том, что медиаконтакты осуществляются представителями целевой аудитории (аудитория медиа, целевая аудитория и множества событий $E = \{E_k\}$, $A = \{A_k\}$ и D схематически изображены на рис. 1). События E_k являются независимыми в совокупности и независимыми от D, поскольку контакты каждого представителя аудитории медиа предполагаются не зависящими от предыстории контактов. Вероятность $P(E_k)$ является условной и может быть вычислена по формуле:

$$P(E_k) \equiv P(E_k / D) = P(DE_k) / P(D) = P(A_k) / P(D), \qquad (2.1)$$

или, поскольку события D и E_k независимы,

$$P(E_k) = P(D)\ P(E_k)/P(D) = \\ = P(DE_k)/P(D) = P(A_k)/P(D), \qquad (2.2)$$

где $P(A_k) = R$ — вероятность того, что контакт с медиасобытием осуществляется любым представителем целевой аудитории, $P(D)$ — вероятность того, что контакт с медиа осуществляется представителем целевой аудитории (вероятность события D, связанного с осуществлением условия контакта с целевой аудиторией). Так как по определению $P(D) = G^\infty$, то согласно (2.1) или (2.2)

$$P(E_k) = R / G^\infty. \qquad (3)$$

Между множествами $E = \{E_k\}$ и $A = \{A_k\} = DE$ при $G^\infty < 1$ имеется следующее отличие. Множество A является подмножеством множества D (аудитория медиа не совпадает с целевой аудиторией) и вероятность событий A_k определяется на множестве D. Вероятность же событий E_k определяется как условная вероятность и определяется на множестве A. Описанная выше структура множеств A, D, E (см. рис. 1) диктуется практическими соображениями: реальная практика размещения рекламы требует, чтобы все измерения рейтингов были отнесены к любой возможной, но всегда конкретной целевой аудитории. Поэтому события из множества $E \setminus D$, связанные с контактами с медиа, не относящимися к выбранной целевой аудитории, не рассматриваются (изображены пунктиром на рис. 1).

Приведенное выше определение охвата аудитории $G(m)$ позволяет вычислить его, используя аппарат теории вероятностей. Если ввести обозначение

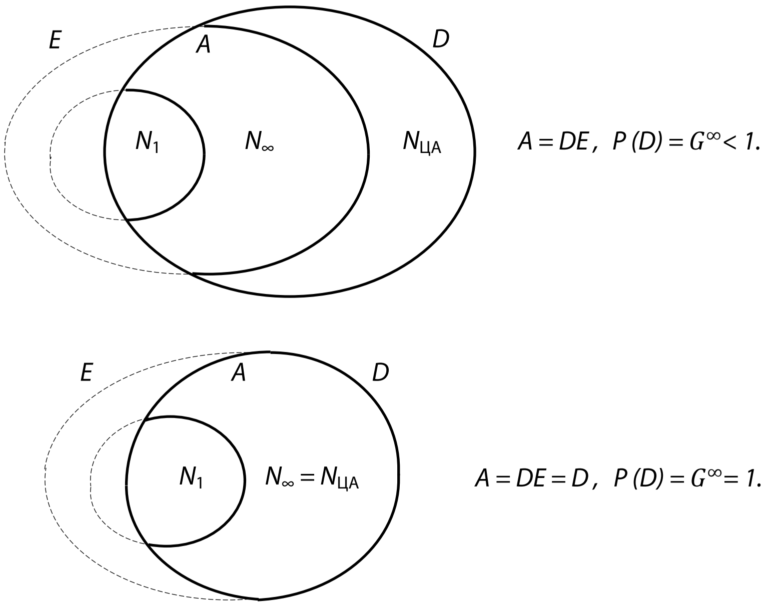

Рис. 1. *Схематическое изображение аудитории медиа, целевой аудитории (ЦА), множеств E, D и A. Здесь* $N_{ЦА}$ *— численность целевой аудитории,* $N_1 = N(A_1) \equiv N(V_1)$ *— аудитория одного медиасобытия,* $N^\infty = N(V^\infty)$ *— аудитория суммы m медиасобытий* V_m *при* $m \to \infty$, $P(D) = N^\infty / N_{ЦА} \equiv G^\infty$, $P(A_k) = N_1 / N_{ЦА} \equiv R$, $P(E_k) = N_1 / N^\infty = R / G^\infty$

$$V_m = \bigcup_{k=1}^{m} A_k. \quad (4)$$

для объединения (суммы) событий A_k, то, согласно приведенным выше определениям охвата и суммы событий A_k, охват есть вероятность события V_m:

$$G(m) = P(V_m). \quad (5)$$

Вероятность $P(V_m)$ может быть вычислена несколькими способами. Один из них основан на справедливости рекуррентного соотношения для $P(V_m)$, установленного в [21]. Для вывода рекуррентного соотношения используем формулу вычисления вероятности объединения совместных событий:

$$P(V_m) = P(A_m \cup V_{m-1}) =$$
$$= P(A_m) + P(V_{m-1}) - P(A_m V_{m-1}). \quad (6)$$

Рассмотрим аргумент последнего слагаемого в (6). Используя свойства операций объединения и пересечения событий, имеем[1]:

$$A_m V_{m-1} = DE_m V_{m-1} = DE_m DW_{m-1} =$$
$$= DDE_m W_{m-1} = DE_m W_{m-1}. \quad (7)$$

Здесь использованы соотношения $A_m = DE_m$, $V_m = DW_m$ и обозначение $W_m = \bigcup_{k=1}^{m} E_k$. Преобразуем последнее слагаемое в формуле (6), используя соотношение (7) и независимость событий D, E_m и W_{m-1}:

$$P(A_m V_{m-1}) = P(DE_m W_{m-1}) = P(D)P(E_m)P(W_{m-1}) =$$
$$= (1/P(D))\, P(D)\, P(E_m)\, P(D)\, P(W_{m-1}) =$$
$$= (1/P(D))\, P(DE_m)\, P(DW_{m-1}) =$$
$$= (1/P(D))\, P(A_m)\, P(V_{m-1}). \quad (8)$$

Подставив (8) в (6) и учитывая равенство (5), получим

$$G(m) = P(A_m) + [1 - P(A_m)/P(D)]\, G(m - 1). \quad (9)$$

Отметим, что в рекуррентную формулу (9) входит отношение $P(A_m)/P(D)$, которое равно $P(E_m)$ согласно (2). На практике более удобными и поэтому широко используемыми параметрами являются $P(A_m) = R$ и $P(D) = G^\infty$, в то время как $P(E_m)$ — вспомогательный параметр, который вычисляется через $P(A_m)$ и $P(D)$: $P(E_m) = P(A_m)/P(D) = R / G^\infty$.

3. Вывод формулы для охвата аудитории на основе рекуррентного соотношения

Рекуррентную формулу (9) можно представить в виде суммы геометрической прогрессии с основанием $1 - R / G^\infty < 1$:

$$G(m) = R + (1 - R / G^\infty)\, G(m - 1) =$$
$$= R + (1 - R/G^\infty)\{R + (1 - R/G^\infty)[R + \ldots + (1 - R/G^\infty)R]\} =$$
$$= R + R(1 - R/G^\infty)\{1 + (1 - R/G^\infty)[1 + \ldots + (1 - R/G^\infty)]\} =$$
$$= R\{1 + (1 - R/G^\infty) + (1 - R/G^\infty)^2 + \ldots + (1 - R/G^\infty)^{m-1}\} =$$
$$= R\sum_{j=0}^{m-1}(1 - R / G^\infty)^j. \quad (10)$$

Суммируя эту прогрессию, получим

$$\sum_{j=0}^{m-1}(1 - R / G^\infty)^j = [1 - (1 - R/G^\infty)^m]/[1 - (1 - R/G^\infty)] =$$
$$= [1 - (1 - R / G^\infty)^m] / (R / G^\infty). \quad (11)$$

Подставив (11) в (10), получим формулу для вычисления охвата аудитории в зависимости от числа размещений рекламы m и параметров медиа R и G^∞:

$$G(m) = G^\infty\, [1 - (1 - R / G^\infty)^m]. \quad (12)$$

Таким образом, в данном разделе формула (12) вычисления охвата аудитории G в зависимости от числа размещений рекламы m и параметров медиа R и G^∞ получена на основе строго доказанного рекуррентного соотношения (9).

4. Спектр охвата и охват целевой аудитории

В работе [21] показано, что формула для вычисления охвата (12) может быть получена другим способом, а именно, суммированием спектра охвата аудитории:

$$G(m) = \sum_{f=1}^{m} g(f). \quad (13)$$

Спектром охвата называется функция $g(f)$, с помощью которой охват аудитории $G(m)$ представляется в виде суммы охватов со всеми возможными частотами контактов f с однотипными медиасобытиями. Отметим, что термины «число контактов» и «частота контактов» далее будут употребляться как синонимы.

Разложение охвата в спектр (13) позволяет разделить всех охваченных людей на группы, каждая из которых включает в себя людей, имевших какое-то конкретное число контактов (группы с одним, двумя, …, m контактами с медиасобытиями).

С точки зрения теории вероятностей $g(f)$ — это вероятность того, что случайно выбранный из целевой аудитории человек имел ровно f контактов с m однотипными медиасобытиями. В [21] показано, что при условии равенства вероятности контакта с каждым медиасобытием $P(A_k) = R$ справедлива следующая формула для вычисления спектра охвата:

$$g(f) = G^\infty C_m^f r^f q^{m-f}, \quad (14)$$

[1] За идею данного вывода автор благодарен Э. Л. Пресману.

где $r = R/G^\infty$, $q = 1 - r$, $C_m^f = m!/[f!(m-f)!]$ — биномиальные коэффициенты.

Справедливость этой формулы подтверждается прямым вычислением, поскольку из формул (13), (14) и формулы бинома Ньютона $\sum_{j=0}^{n} C_n^j A^j B^{n-j} = (A+B)^n$ следует доказанная другим способом формула (12):

$$\sum_{f=1}^{m} g(f) = G^\infty \sum_{f=1}^{m} C_m^f r^f q^{m-f} =$$

$$= G^\infty \sum_{f=0}^{m} C_m^f r^f q^{m-f} - G^\infty q^m = G^\infty (r+q)^m - G^\infty q^m =$$

$$= G^\infty (1-q^m) = G^\infty [1 - (1 - \mathrm{R}/G^\infty)^m]. \qquad (15)$$

5. Модифицированное биномиальное распределение вероятностей

Введем новую случайную величину с распределением вероятностей $p(f)$, математическое ожидание которой будет равно среднему числу контактов с рекламой, приходящихся на одного представителя целевой аудитории. Покажем, что распределение вероятностей случайной величины f (числа контактов с медиасобытием — размещенной рекламой) при сформулированном выше условии должно описываться следующей формулой:

$$p(f) = C_m^f r^f q^{m-f} / (1 - q^m), \qquad (16)$$

где случайная величина f изменяется на отрезке $1 \le f \le m$. Распределение вероятностей (16) отличается от биномиального $\beta_r(m, f)$ нормировочным множителем $c = 1/(1 - q^m)$, областью определения ($f \ge 1$) и может быть названо модифицированным биномиальным распределением.

Математическое ожидание MF_β и среднеквадратичное (стандартное) отклонение σF_β случайной величины F_β, распределенной по биномиальному закону с функцией распределения $\beta_r(m, f) = C_m^f r^f (1 - r)^{m-f}$, как известно, даются следующими выражениями (см. [9, с. 572]):

$$MF_\beta = mr, \sigma F_\beta \equiv (DF_\beta)^{1/2} = (mrq)^{1/2}, \qquad (17)$$

здесь $r = R/G^\infty$, $q = 1 - r$.

Найдем математическое ожидание случайной величины $F = cF_\beta$ с функцией распределения $p(f)$. Используя определение математического ожидания (см. [9, с. 544]) и соотношение $C_m^f = (m/f) C_{m-1}^{f-1}$, находим

$$MF = \sum_{f=1}^{m} f \beta_r(m, f) = \sum_{j=1}^{m} f C_m^f r^f q^{m-f} / (1 - q^m) =$$

$$= mr / (1 - q^m) \sum_{f=1}^{m} C_{m-1}^{f-1} r^{f-1} (1-r)^{m-f}.$$

Введем обозначения $j = f - 1$, $n = m - 1$ и подставим их в правую часть этого равенства. Используя формулу бинома Ньютона, получим

$$MF = mr / (1 - q^m) \sum_{j=0}^{n} r^j (1-r)^{n-j} =$$

$$= mr / (1 - q^m)\, (r + 1 - r)^n = mr / (1 - q^m) =$$

$$= mR / [G^\infty (1 - q^m)] = mR / G(m) \equiv \overline{f}. \qquad (18)$$

Таким образом, математическое ожидание случайной величины F равно среднему числу контактов с медиасобытиями (рекламой) $\overline{f} \equiv mR/G(m)$, приходящихся на одного человека из целевой аудитории. Здесь m — число размещений рекламы, R — измеряемый методами медиаисследований рейтинг СМИ, в котором размещается реклама, $G(m)$ — охват аудитории, вычисляемый согласно (12).

В том, что $\overline{f}$ — именно среднее число контактов, нетрудно убедиться следующим образом: если умножить числитель и знаменатель дроби $mR/G(m)$ на численность целевой аудитории, то в этом случае числитель даст полное число контактов с медиасобытиями, а знаменатель — число людей, получивших эти контакты.

Тот факт, что математическое ожидание случайной величины F равно среднему числу контактов с рекламой $mR/G(m)$, позволяет использовать ее функцию распределения (16) для формулировки *критерия эффективности* размещения рекламы на основе понятий математического ожидания и стандартного отклонения (см. следующий раздел).

Найдем стандартное отклонение σ случайной величины $F = cF_\beta$ по формуле $\sigma = \sqrt{DF}$, где DF — дисперсия случайной величины F, которую, в свою очередь, удобно вычислить по формуле, следующей из определения дисперсии:

$$DF \equiv M(F - MF)^2 = M[F^2 - 2F(MF) + (MF)^2] =$$

$$= MF^2 - (MF)^2 = MF^2 - (MF)^2 - MF + MF = M(F^2 - F) -$$

$$- (MF)^2 + MF = M[F(F-1)] - MF(MF - 1). \qquad (19)$$

Используя эту формулу и определение математического ожидания, находим

$$DF = M[F(F-1)] - MF(MF - 1) =$$

$$= \sum_{f=1}^{m} f(f-1) c \beta_r(m, f) - cmr(cmr - 1) =$$

$$= \sum_{f=2}^{m} f(f-1) c C_m^f r^f (1-r)^{m-f} - cmr(cmr - 1) =$$

$$= m(m-1) r^2 c \sum_{f=2}^{m} C_{m-2}^{f-2} r^{f-2} (1-r)^{m-f} - cmr(cmr - 1) =$$

$$= m(m-1) r^2 c \sum_{j=0}^{n} C_n^j r^j (1-r)^{n-j} - cmr(cmr - 1) =$$

$$= m(m-1)r^2\, c(r+1-r)^n - cmr(cmr-1) =$$
$$= m(m-1)r^2 c - cmr(cmr-1) =$$
$$= m^2r^2c - mr^2c - m^2r^2c^2 + cmr =$$
$$= c\, mrq - (cmr)^2\,(1 - 1/c) = cDF_\beta - (cMF_\beta)^2\, q^m =$$
$$= mrq/(1-q^m) - [mr/(1-q^m)]^2\, q^m =$$
$$= mrqG^\infty/G(m) - [mrG^\infty/G(m)]^2\, q^m. \qquad (20)$$

При выводе формулы (20) использованы обозначения $q = 1 - r$, $j = f - 2$, $n = m - 2$, соотношения $C_m^f = [m(m-1)]/[f(f-1)]C_{m-2}^{f-2}$, $DF_\beta = mrq$, $MF_\beta = mr$ и формула бинома Ньютона.

Таким образом, стандартное отклонение $\sigma = \sqrt{DF}$ случайной величины F, характеризующее степень рассеяния случайной величины относительно ее математического ожидания, дается следующей формулой:

$$\sigma = \{mrqG^\infty/G(m) - [mrG^\infty/G(m)]^2\, q^m\}^{0,5}. \qquad (21)$$

При большом числе размещений рекламы (при $m \to \infty$) величины $q^m \to 0$, $m^2q^m \to 0$, охват $G(m) \to G^\infty$ и согласно формуле (21) стандартное отклонение

$$\sigma \approx \sqrt{mrq}. \qquad (22)$$

В заключение данного раздела отметим, что формулы вычисления охвата и спектра охвата (12)–(14), а также формулы (18) и (21) лежат в основе математической теории медиапланирования, поскольку позволяют разработать методы вычисления таких важных с точки зрения практики размещения рекламы характеристик, как эффективный мультимедийный охват аудитории, риск неэффективного размещения рекламы, эффективное число размещений, доля рекламного голоса, прогнозируемые доход и прибыль и др., подробнее см. в [19].

Ниже в качестве примера приложения полученных формул приводятся оценка риска неэффективного размещения рекламы и вычисление эффективного числа размещений рекламы в медиа.

6. Риски и эффективное число размещений рекламы

Использование понятия риска в науке имеет довольно продолжительную историю. В книге «Риск, неопределенность и прибыль» (1921 г.) Ф. Найт дал одну из первых трактовок понимания риска применительно к решению экономических задач, используя для его определения понятия «объективной» и «субъективной» вероятностей [26]. Используя понятие объективной вероятности, риск можно оценить количественно с помощью математического аппарата теории вероятностей как вероятность ущерба (более широко — как вероятность неблагоприятного исхода). Субъективная вероятность, оцениваемая на основе субъективных соображений, может быть, по Ф. Найту, использована для оценки неопределенности того или иного исхода.

Наиболее широко понятие риска как вероятности неблагоприятного исхода используется для оценки финансовых рисков. Например, на основе количественной оценки величины риска в работах Г. Марковица, Ф. Шарпа показано, что инвестирование в несвязанные активы с одинаковой доходностью снижает риски и повышает эффективность инвестиционного портфеля [27, 28]. В монографии К. Рэдхэда, С. Хьюса «Управление финансовыми рисками» (1988 г.) рассматриваются различные виды финансовых рисков, в частности, экономический валютный риск определяется как «…вероятность неблагоприятного воздействия изменений обменного курса на экономическое положение компании…» [16, с. 17].

В работе «Понятие риска» (1991 г.) Н. Луман отметил, что понимание риска как вероятности ущерба, которую можно вычислить вероятностными методами, не всегда соответствует той ситуации, которая имеет место в действительности [11]. В этой работе Н. Луман трактует риск как понятие, противоположное не надежности принятия решений, а опасности, исходящей из внешних неконтролируемых обстоятельств. Весьма показательны следующие высказывания Н. Лумана: «Если пытаешься определить понятие риска, то впечатление такое, будто заехал в густой туман, где видимость не дальше бампера машины. Даже в основополагающих работах проблема никогда не постигается должным образом», «…дефинициям не надо уделять слишком много внимания, ибо они служат только отграничению предмета, но не его адекватному описанию (не говоря уже об объяснении). И все-таки нельзя вообще начать исследование, если даже не ясно, о каком предмете должна идти речь».

Э. Гидденс в работе «Судьба, риск и безопасность» (1991 г.) отмечает одну существенную особенность вычисления риска в рамках количественного подхода: «Исчисление риска … никогда не может быть полным, поскольку даже в среде с относительно ограниченным уровнем риска всегда существует возможность неожиданных и непредвиденных исходов» [6]. Другими словами, количественные оценки риска могут быть только вероятностными. Отсюда следует, что использование этих оценок также носит рискованный характер.

Согласно П. Бернстайну, риск — это величина, которой можно управлять: «Сущность управления риском состоит в максимизации набора обстоятельств, которые мы можем контролировать, и минимизации набора обстоятельств, контролировать которые нам не удастся и в рамках которых связь причины и следствия от нас скрыта» [4, с. 215].

К настоящему времени понятие риска широко используется для анализа различных явлений в экономике, финансах, социологии, политике, психологии и других областях человеческой деятельности [5, 10, 8, 12]. Большой вклад в изучение проблем риска внесли российские ученые В.А. Абчук, А.П. Альгин, В.Е. Бенинг, Я.Д. Вишняков, В.М. Гранатуров, А.М. Дубров, Р.М. Качалов, Г.Б. Клейнер, В.Ю. Королев, А.Г. Мадера, С.А. Смоляк, А.Г. Шоломицкий, С.Я. Шоргин и др. В монографии Р.М. Качалова «Управление экономическим риском» приводится подробный анализ понятия «экономический риск» и методов управления этим риском, а также приводится обширная русскоязычная библиография по этой теме [8].

Понятие риска находит применение также и для анализа рекламной деятельности. В работах [24, 25, 22] изложены методы оценки рисков размещения рекламы в СМИ. Один из методов вычисления рисков размещения рекламы основан на возможности количественной оценки вероятности не получить запланированное рекламодателем эффективное число рекламных контактов $f_{эф}$. Эффективным называется такое число (частота) рекламных контактов, приходящихся в среднем на одного представителя целевой аудитории, которого оказывается достаточно для реализации поставленной рекламодателем цели рекламы. В частности, оказывается достаточно для формирования той или иной формы осведомленности о предмете рекламы, лояльности к нему и т. п. Величина эффективной частоты $f_{эф}$ находится следующими способами: на основе анализа результатов размещения рекламы, а также по специально разработанным методикам, напр., методикам Остроу и Росситера — Перси (см. [17, с. 213; 15; с. 491].

Количественная оценка рисков размещения рекламы может быть осуществлена с помощью управления параметрами функции распределения случайной величины F (числа рекламных контактов, см. предыдущий раздел) — математическим ожиданием $\overline{f}$ и стандартным отклонением σ. При этом понятие средней частоты используется для формулировки критерия эффективности размещения рекламы, а стандартное отклонение — для определения риска как вероятности того, что этот критерий эффективности не будет реализован. Суть упомянутого выше управления параметрами $\overline{f}$ и σ состоит в следующем: число размещений рекламы m подбирается таким, чтобы среднее число контактов с рекламой соответствовало эффективной частоте, а поскольку случайная величина имеет дисперсию (рассеяна относительно среднего значения), то уровень рассеяния, определяемый величиной стандартного отклонения σ, подбирается таким, чтобы риск не получить эффективное число контактов не превосходил заданной величины.

Введем понятие эффективного охвата аудитории и риска размещений рекламы. Эффективным охватом аудитории $G_{эф}$ назовем долю целевой аудитории, каждый представитель которой получил число контактов с рекламой, не меньшее эффективной $f_{эф}$ частоты. Очевидно, что эффективный охват $G_{эф}$ может быть вычислен суммированием спектра охвата (14), начиная со слагаемого, соответствующего эффективной частоте:

$$G_{эф} = \sum_{f=f_{эф}}^{m} g(f). \qquad (23)$$

Согласно эргодической гипотезе эффективный охват (23) можно трактовать как вероятность того, что при m-кратном размещении рекламы в СМИ средний представитель аудитории получит число контактов с рекламой, не меньшее эффективной $f_{эф}$ частоты.

Риск неэффективного размещения рекламы ρ определим как вероятность того, что случайно выбранный представитель целевой аудитории получит число контактов с рекламой, меньшее величины эффективной частоты $f_{эф}$. Исходя из приведенных выше определений риска ρ и эффективного охвата $G_{эф}$, а также постулата полной вероятности, риск ρ может быть вычислен следующим образом:

$$\rho = 1 - G_{эф}, \qquad (24)$$

где $G_{эф}$ — эффективный охват, вычисляемый согласно формуле (23). Формулы (23), (14), (24) позволяют осуществлять точное вычисление риска неэффективного размещения рекламы. Далее изложим метод приближенной оценки риска.

Как показано в предыдущем разделе, случайная величина F описывается модифицированным биномиальным распределением вероятностей с математическим ожиданием MF и стандартным отклонением σ, вычисляемым по формулам (18) и (21). Согласно локальной предельной теореме Муавра — Лапласа, при большом числе испытаний биномиальное распределение вероятностей является асимптотически нормальным распределением с соответствующими параметрами (математическим ожиданием и дисперсией), см., напр., [18, с. 186; 3, с. 29]. На основании этой теоремы можно утверждать, что при большом числе размещений рекламы (при $m \to \infty$) функция распределения случайной величины F может быть задана плотностью вероятности нормального распределения

$$p(f) = (\sigma\sqrt{2\pi})^{-1} \exp[-(f-\bar{f})^2/(2\sigma^2)], \quad (25)$$

где математическое ожидание $\bar{f}$ и стандартное отклонение σ вычисляются по формулам (18) и (21). Вероятность нахождения текущего значения биномиально распределенной случайной величины в заданной окрестности ее математического ожидания при большом числе испытаний оценивается с помощью интегральной теоремы Муавра — Лапласа [18, с. 189; 25, с. 30]. Применяя эту теорему для оценки вероятности того, что число рекламных контактов f находится внутри интервала ($\bar{f} - t\sigma$; $\bar{f} + t\sigma$), получим, что эта вероятность дается величиной функции Лапласа

$$\Phi(t) = (\sqrt{2\pi})^{-1}\int_{-t}^{t} \exp(-\frac{x^2}{2})dx, \quad (26)$$

где t — параметр, задающий ширину интервала отклонения частоты f от среднего значения $\bar{f}$ в единицах стандартного отклонения σ. Отметим, что в литературе по теории вероятностей и теории ошибок встречаются разные обозначения и названия для этого интеграла как функции t. В данной работе, как и в работах [3, с. 30; 1, с. 70]), эта функция называется функцией Лапласа или интегралом вероятностей. В работе [7, с. 132], как и во многих других, функцией Лапласа называется функция $\Phi(t)/2$, а в справочнике [2, с. 601] — функция $\Phi(\sqrt{2}t)$. Величина функции Лапласа находится из таблиц (см., напр., [3, с. 230; 1, с. 71]); или с помощью компьютерных программ (SPSS, Statistica, Excel и др.).

Для того, чтобы вычислить эффективный охват $G_{эф}$ и записать уравнение для вычисления эффективного числа контактов, сформулируем критерий эффективности размещения рекламы: число размещений рекламы m должно быть таким, чтобы заданная доля аудитории медиа $G_{эф}$ (эффективный охват) получила число контактов, не меньшее эффективного $f_{эф}$. Для реализации этого критерия величина эффективной частоты $f_{эф}$ должна соответствовать левой границе интервала ($\bar{f} - t\sigma$; $\bar{f} + t\sigma$) наиболее вероятных частот контактов

$$f_{эф} = \bar{f} - t\sigma. \quad (27)$$

Эффективный охват $G_{эф}$ в рассматриваемом случае равен доле аудитории, получившей число контактов с рекламой, большее $f_{эф} = \bar{f} - t\sigma$:

$$G_{эф} = \sum_{f=f_{эф}}^{m} p(f) = \sum_{f=\bar{f}-t\sigma}^{m} p(f), \quad (28)$$

где $p(f)$ вычисляется согласно (25). Используя формулу (28), эффективный охват $G_{эф}$ при $m \to \infty$ можно оценить следующим образом:

$$G_{эф}(t) =$$

$$= \sum_{f=\bar{f}-t\sigma}^{f_{\max}} p(f) \approx (\sigma\sqrt{2\pi})^{-1}\int_{\bar{f}-t\sigma}^{\infty} \exp[-(f-\bar{f})^2/(2\sigma^2)]df =$$

$$= (\sigma\sqrt{2\pi})^{-1}\int_{-\infty}^{t\sigma} \exp[-x^2/(2\sigma^2)]dx =$$

$$= (\sqrt{2\pi})^{-1}\int_{-\infty}^{t} \exp(-x^2/2)dx =$$

$$= (\sqrt{2\pi})^{-1}\int_{-\infty}^{0} \exp(-x^2/2)dx + (\sqrt{2\pi})^{-1}\int_{0}^{t} \exp(-x^2/2)dx$$

$$= 0{,}5 + 0{,}5\Phi(t). \quad (29)$$

где $\Phi(t)$ — функции Лапласа (26). При выводе формулы (29) использован интеграл Эйлера — Пуассона $\int_0^\infty \exp(-x^2/2)dx = \sqrt{\pi/2}$. Подставляя (29) в (24), находим формулу вычисления риска ρ неэффективного размещения рекламы:

$$\rho = 0{,}5 - 0{,}5\Phi(t). \quad (30)$$

Риск ρ неэффективного размещения рекламы согласно (30) является функцией параметра t, задающего ширину интервала отклонения частоты рекламных контактов f от средней частота $\bar{f}$ в единицах стандартного отклонения σ. Выражение (30) можно рассматривать как уравнение относительно параметра t при заданной величине риска ρ. На рис. 2 приведена зависимость $t(\rho)$, полученная в результате решения уравнения (30) относительно t при всех возможных значениях ρ. Согласно данным, приведенным на рис. 2, риску $\rho = 50$ % соответствует значение $t = 0$, риску $\rho = 16$ % — значение $t = 1$, риску $\rho = 84$ % — значение $t = -1$ и т. д.

Теперь запишем уравнение для вычисления эффективного числа размещений рекламы $m_{эф}$, такого, что при числе размещений, большем эффективного, т. е. при $m \geq m_{эф}$, средний представитель аудитории получит с рекламой число контактов f, большее эффективного $f_{эф}$: $f \geq f_{эф}$. Это уравнение непосредственно следует из критерия эффективности (27):

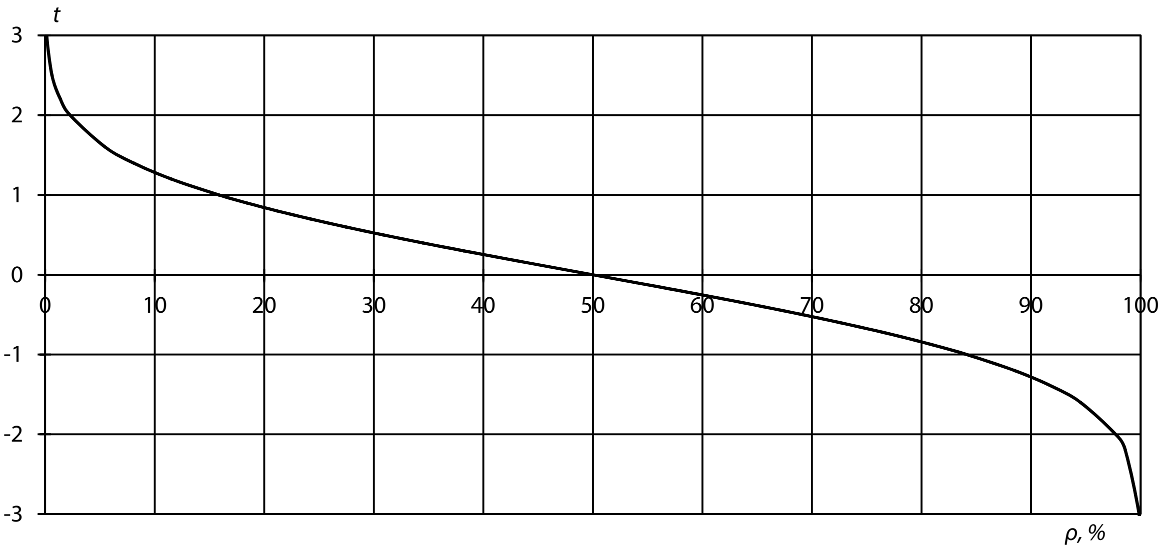

Рис. 2. *Зависимость параметра t от величины риска ρ согласно уравнению (30)*

$$\overline{f}(m_{эф}) = f_{эф} + t\,\sigma(m_{эф}). \qquad (31.1)$$

Уравнение (31.1) с учетом выражений (18), (21), (12) может быть записано в виде:

$$m_{эф}r/(1-q^{m_{эф}}) = f_{эф} + t(\rho)\{m_{эф}rq/(1-q^{m_{эф}}) -$$
$$- [m_{эф}r/(1-q^{m_{эф}})]^2 q^{m_{эф}}\}^{0,5}, \qquad (31.2)$$

где $r = R/G^{\infty}$, $q = 1 - r$, $f_{эф}$ — эффективное число контактов с рекламой, которое необходимо получить среднему представителю целевой аудитории для того, чтобы цель рекламы была достигнута, t — параметр, задающий ширину интервала отклонения частоты рекламных контактов f от среднего значения $\overline{f}$ в единицах стандартного отклонения σ.

Уравнение (31.2) решается численно совместно с уравнением (30) следующим образом: вначале по уровню допустимого риска ρ, заданному рекламодателем, вычисляется величина параметра t согласно уравнению (30); затем найденное t и параметры медиа R и G^{∞} подставляются в уравнение (31.2), которое решается относительно $m_{эф}$.

Отметим, что при учете наряду со случайной также и постоянной аудитории уравнение для эффективного числа размещений рекламы $m_{эф}$, записанное в виде (31.1), остается неизменным, однако в этом уравнении изменяются выражения (12), (18) и (21) для вычисления охвата аудитории $G(m)$, среднего числа контактов $\overline{f}$ и стандартного отклонения σ. Уравнения (31.2) и (31.3) теряют свою справедливость для случая двухсегментной аудитории и должны включать в себя новые выражения для $G(m)$, $\overline{f}$ и σ.

При большом числе размещений рекламы уравнение (31.2) можно упростить: при $m \to \infty$ величины $q^m \to 0$, $m^2q^m \to 0$, а величина охвата $G(m)$ стремится к предельному значению $G(m) \to G^{\infty}$. Используя эти условия, уравнение (31.2) представим в следующем виде:

$$m_{эф} - t(M-1)^{1/2}\sqrt{m_{эф}} - f_{эф}M = 0. \qquad (31.3)$$

Решение уравнения (31.3) дает аналитическую зависимость эффективного числа размещений $m_{эф}$ от параметров медиа, параметра t, связанного с величиной риска, а также от эффективной частоты:

$$m_{эф} = \{t(M-1)^{1/2}/2 + [t^2(M-1)/4 + f_{эф}M]^{1/2}\}^2. \qquad (32)$$

В выражении (32) величина M вычисляется по найденным в результате медиаисследований параметрам медиа R и G^{∞}, величина t вычисляется по заданному уровню риска ρ согласно уравнению (30), а величина эффективной частоты $f_{эф}$ задается рекламодателем, исходя из цели рекламы.

Таким образом, выражение (32) позволяет вычислить эффективное число размещений рекламы $m_{эф}$ в каждом медиа. Напомним смысл эффективного числа размещений: при числе размещений рекламы, равном эффективному $m = m_{эф}$, достигается запланированный уровень интенсивности рекламы (он задается величиной $f_{эф}$) с заданным уровнем риска ρ.

Необходимо отметить разницу между эффективным и оптимальным числом размещений рекламы. Для того, чтобы число размещений, вычисленное согласно (32), было оптимальным, нужно, чтобы оно соответствовало наименьшему рекламному бюджету. Отметим, что задача оптимизации размещения рекламы в одном медиа имеет ограниченную область применения. Важное практическое значение имеет оптимизация

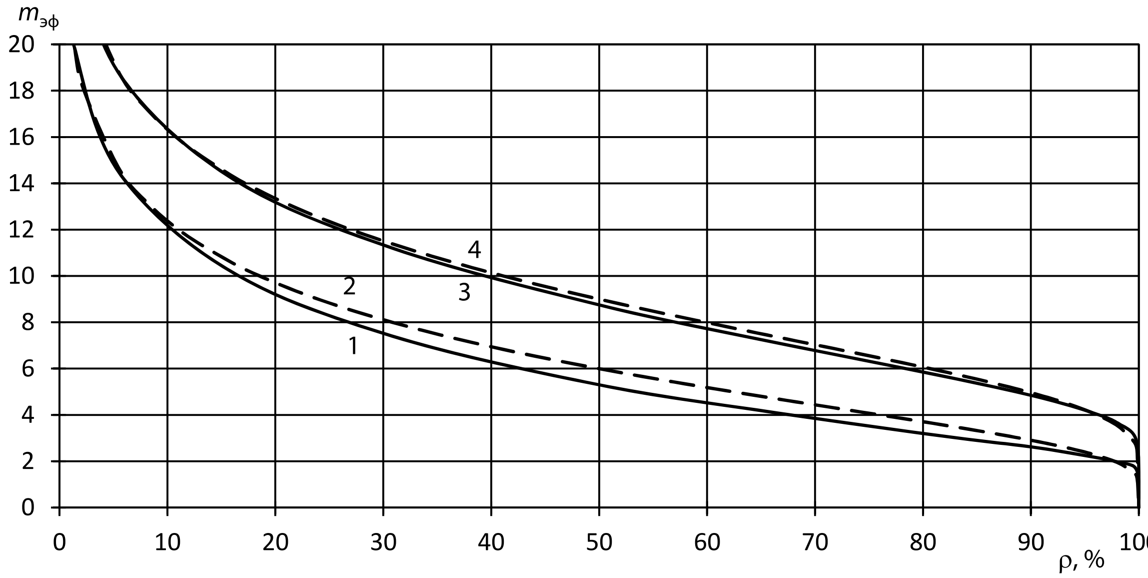

Рис. 3. *Зависимость эффективного числа размещений рекламы $m_{эф}$ от величины риска ρ. Кривые 1, 2 — $f_{эф} = 2$; 3, 4 — $f_{эф} = 3$; $G^\infty = 3R$*

размещения рекламы в нескольких медиа. Такая оптимизация может быть осуществлена на основе изложенных выше методов с помощью численного моделирования, подробнее см. [19].

На рис. 3 показана зависимость эффективного числа размещений $m_{эф}$ от величины риска неэффективного размещения рекламы ρ при разных значениях эффективной частоты $f_{эф}$. Сплошные линии на рис. 3 соответствуют найденному численными методами решению уравнения (31.2), а пунктирные кривые — аналитическому решению (31.3). Представленные данные свидетельствуют о том, что аналитическое решение (31.3) является хорошим приближением к более точному численному решению уравнения (31.2), причем точность аналитического решения оказывается тем выше, чем больше величина эффективной частоты $f_{эф}$.

Данные, приведенные на рис. 3, позволяют принимать решение о числе размещений рекламы m в любом медиа, исходя из заданных параметров: эффективной частоты контактов с рекламой $f_{эф}$ и риска ρ не получить это эффективное число контактов. Пусть, например, известно, что для решения рекламной задачи представителю целевой аудитории необходимо получить не менее 3 рекламных контактов за рекламный цикл. Тогда, согласно кривым 3 и 4 на рис. 3, в медиа с параметрами $G^\infty = 3R$ необходимо сделать не менее 16 размещений рекламы для того, чтобы риск не получить запланированное число контактов не превысил 10 %.

Заключение

В данной работе развиты некоторые положения экономико-математической теории медиапланирования, а именно:

1) приведено новое, более строгое, чем в предшествующих работах, доказательство рекуррентного соотношения для охвата аудитории, на основе которого дан вывод одной из основных формул теории — формулы вычисления охвата целевой аудитории в зависимости от числа размещений рекламы и параметров СММ;

2) обоснована необходимость введения случайной величины (числа контактов с рекламой), описываемой модифицированным биномиальным распределением вероятностей, и приведен вывод формул для математического ожидания и дисперсии этой случайной величины;

3) сформулировано понятие риска неэффективного размещения рекламы и изложен аналитический метод его оценки, основанный на использовании полученных ранее формул для математического ожидания и дисперсии;

4) введено понятие эффективного числа размещений рекламы, позволяющего контролировать риски размещения рекламы, связанные с достижением необходимого уровня эффективности рекламного воздействия; получено уравнение для вычисления эффективного числа размещений рекламы; показано, что результаты приближенного аналитического решения указанного уравнения хорошо согласуются с результатами более точного численного решения этого уравнения (последнее

обстоятельство позволяет использовать более удобное аналитическое решение для оперативных практических оценок эффективного числа размещений рекламы в любых медиа с известными из исследований рейтингом и предельным охватом).

Список источников

1. *Агекян Т. А.* Основы теории ошибок. — М.: Наука, 1972. — 172 с.
2. *Анго А.* Математика. — М.: Наука, 1964. — 772 с.
3. *Белько И. В., Свирид Г. П.* Теория вероятностей и математическая статистика. — Минск: Новое знание, 2003. — 252 с.
4. *Бернстайн П.* Против богов: Укрощение риска. — М.: ЗАО «Олимп-Бизнес», 2008 (1996). — 400 с.
5. *Вишняков Я. Д., Радаев Н. Н.* Общая теория рисков. — М. : Издательский центр «Академия», 2008. — 368 с.
6. *Гидденс Э.* Судьба, риск и безопасность // THESIS. — 1994 (1991). — № 5. — С. 107–134.
7. *Гмурман В. Е.* Теория вероятностей и математическая статистика. — М.: Высш. шк., 2003. — 479 с.
8. *Качалов Р. М.* Управление экономическим риском: Теоретические основы и приложения. — М. ; СПб. : Нестор-История, 2012. — 248 с.
9. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике. — М.: Наука, 1984. — 832 с.
10. *Королев В. Ю., Беннинг В. Е., Шоргин С. Я.* Математические основы теории риска. — М. : Физматлит, 2011. — 591 с.
11. *Луман Н.* Понятие риска // THESIS. — 1994 (1991). — № 5. — С. 136–160.
12. *Мадера А. Г.* Риски и шансы. Неопределенность, прогнозирование и оценка. — М. : КРАСАНД, 2014. — 448 с.
13. *Попов Е. В., Шматов Г. А.* Вычисление охвата СМИ // Проблемы управления. — 2010. — № 2. — С. 34–38.
14. *Попов Е. В., Шматов Г. А.* Теория вычисления охвата СМИ // Проблемы управления. — 2009. — № 5. — С. 22–27.
15. *Росситер Дж. Р., Перси Л.* Реклама и продвижение товаров. — СПб.: Питер, 2000. — 656 с.
16. *Рэдхэд К., Хьюс С.* Управление финансовыми рисками. — М.: ИНФРА-М, 1996 (1988). — 288 с.
17. *Сиссорс Дж. З., Бэрон Р. Б.* Рекламное медиапланирование. — СПб.: Питер, 2004. — 412 с.
18. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 1. — М.: Мир, 1967. — 500 с.
19. *Шматов Г. А.* Теория медиапланирования. — Екатеринбург: Гуманитарный ун-т, 2012. — 442 с.
20. *Шматов Г. А.* Экономико-математическая теория медиапланирования // Менеджмент в России и за рубежом. — 2013. — № 3. — С. 12–21.
21. *Шматов Г. А.* Математические основы медиапланирования. — Екатеринбург: Уральский госуниверситет, 2003. — Деп. в ВИНИТИ 04.06.03. — № 1090-В2003. — 108 с.
22. *Шматов Г. А.* Оптимизация рисков размещения рекламы в СМИ // Журнал экономической теории. — 2016. — № 2. — С. 96–99.
23. *Шматов Г. А.* Основы медиапланирования: эвристический подход. — Екатеринбург: УрГУ, 2005. — 332 с.
24. *Шматов Г. А.* Риски и эффективное число размещений рекламы // Менеджмент в России и за рубежом. — 2015. — № 5. — С. 3–9.
25. *Шматов Г. А.* Теория медиапланирования и оптимизация рисков размещения рекламы // Журнал экономической теории. — 2015. — № 3. — С. 162–176.
26. *Knight F.* Risk, Uncertainty and Profit. — Boston : Houghton Mifflin Co, 1921 // THESIS. — 1994. — № 5. — P. 12–28.
27. *Markowitz H. M.* Portfolio Selection // Journ. Finance. — 1952. — March. — P.77–91.
28. *Sharpe W. F.* A Simplified Model of Portfolio Analysis //Management Science. — 1963. — Jan. — P. 277–293.