ПИСЬМА В РЕДАКЦИЮ

УДК 330.4

МОДЕЛИРОВАНИЕ МАКРОЭКОНОМИЧЕКОЙ СРЕДЫ С ПОМОЩЬЮ РАЗДЕЛЯЮЩЕЙ НЕЙРОННОЙ СЕТИ

Д. В. Гилёв, В. Д. Мазуров

В статье ставится проблема интерпретации экономических данных, в том числе макроэкономических. При этом делается акцент на том, что эти данные нередко противоречивы. Для решения подобного рода экономических задач рассматривается нейронная сеть. Вначале анализируется простейшая нейронная сеть с одним нейроном, которая и будет служить разделяющей функцией. Далее приводится теорема существования разделяющей нейронной сети (функции), предлагается ее доказательство. При этом обосновывается переход к бесконечному случаю, то есть к нейронным системам. Делается вывод о неформализуемости некоторых экономических задач и приводятся основные источники, в которых раскрываются способы их решения. Отмечается один из важнейших таких подходов — метод комитетов.

Ключевые слова: экономическое равновесие, нейронная система, разделяющая нейронная сеть.

Интерпретация экономических данных, прогнозирование и диагностика, особенно диагностика состояния экономического субъекта (лица, принимающего решения), а также абсолютно злободневная тема экологии, требуют применения мощных вычислительных средств, в том числе и алгоритмических. Таким средством являются большие нейронные системы. Нейронные системы в отличие от сетей могут включать бесконечное число нейронов и бесконечное число признаков. В этом виде анализ системы становится прозрачным и удобным для математического анализа. Переход к бесконечномерным системам — это полезная «аппроксимация наоборот». При этом мы можем предполагать, что математическая модель может быть противоречивой, и это никак не повод для удаления как бы ненужной модели.

В экономике нередко встречаются противоречивые модели, в том числе в макроэкономике. Сейчас разрабатываются средства адекватного анализа инконсистентных задач (в частности, противоречивых — с несовместной системой условий задачи).

Все последующие рассмотрения опираются на использование линейного пространства технико-экономических процессов. Это естественное предположение, так как в моделях экономики отображаются компоненты экономических ситуаций: комплексы машин, экономические субъекты, лица, принимающие решения, вспомогательное оборудование, ресурсы. Эти компоненты можно считать координатами вектора состояния. В связи с этим интенсивность использования технико-экономических процессов можно представить в виде вектора интенсивностей x, который является элементом линейного пространства.

Стоит отметить, что еще Л. Вальрас заложил основы общего экономического равновесия, используя математику XIX века. В дальнейшем существенным приемом анализа являлось построение функций, разделяющих множества. Однако существуют такие задачи, где для разделения множеств требуются коллективы функций. Именно методы распознавания образов и математической статистики позволяют заглянуть за границы прецедентного опыта.

Мы же будем строить слоистую ориентированную дискриминантную нейронную сеть для разделения двух множеств. Схема сети следующая:

$$G \to S \to x \to A \to R,$$

где G — неизвестная нам окружающая среда, S — сенсорный слой, x — элемент пиксельного множества, A — блок ассоциативных нейронов, R — блок формирования ответа всей сети на входной массив G. Здесь в одной из интерпретаций x можно трактовать как процесс преобразования «затраты $\to$ выпуск», то есть как результат комбинирования базисных процессов. Далее предполагаем, что объемы затрат и выпуска неотрицательны. Затем, при комбинировании технологий, мы учитываем аддитивность и однородность вхождения составляющих в обобщенный процесс. Такой абстрактный подход к моделированию применил Х. Никайдо.

Он подчеркивает, что многие классические подходы экономистов неявно были основаны на вербальной форме математических по существу утверждений. Это можно увидеть на моделях Вальраса и Леонтьева. Кстати, именно такой подход критикуется рядом экономистов за его абстрактность. Они полагают, следуя здравому смыслу, что человек способен рационально действовать уже в самой среде G. То, что это невозможно, предполагал Дж. Беркли, и затем привел аргументы в пользу такого вывода В. Гейзенберг. Беркли, в частности, считал, что действительность — это то, что воспринимается. В целом это математико-экономический подход.

Вместо обоснованной аргументированной критики эмпириокритицизма и математического подхода к экономическим исследованиям многие экономисты критикуют его с точки зрения здравого смысла.

При исследовании нейронных сетей приходится по существу и по необходимости использовать методологию. Но мы обсуждаем только необходимые элементы методологии для обоснования нашего подхода.

На самом деле мы, возможно, способны анализировать только результат, а не механику воздействия среды, то есть G, на сенсорное множество S. Значит, мы можем иметь дело только с пиксельным множеством, которое можно описать как вектор x — элемент линейного пространства. Вектор x попадает на вход ассоциативного множества нейронов A, и результат реагирования этого блока попадает на множество R нейронов, вырабатывающих окончательную реакцию сети.

Через f обозначим искомую разделяющую функцию — простейшую сеть над линейным пространством $\boldsymbol{X}$, содержащую только один нейрон. Если такая простейшая сеть не справляется с задачей отделения одного множества от другого, то мы строим более сложную сеть, например, используя метод комитетов. Сопряженное к $\boldsymbol{X}$ пространство обозначим через X^*. Введем множество

$$S^*(r) = \{f \in X^* : ||f|| \leq r\},$$

где $||f||$ — норма функции f. Через P обозначим неотрицательную часть пространства $\boldsymbol{R}^n$. Далее введем множество K: это множество всех точек пространства $\boldsymbol{R}^n$ с координатами $f(x(i))$, когда f пробегает построенное множество $S^*(r)$.

Так как множество $S^*(r)$ компактно в слабой топологии на X^*, то множество K компактно в $\boldsymbol{R}^n$.

Вводим условия 1) и 2):

1) неравенства разделения множеств;

2) двойственная система.

Точные формулировки — ниже. Мы докажем теорему об условиях существования разделяющего нейрона.

Предположим, применяя метод от противного, что в множестве $S^*(r)$ нет функции, удовлетворяющей условию 2). Значит, множества $P + c$ и K, где c — какой-нибудь фиксированный неотрицательный вектор, не имеют общих точек. В силу свойств этих множеств они разделяются некоторой гиперплоскостью. То есть существуют числа $l(1), \ldots, l(n), d$, при которых $l(k)$ неотрицательны и выполняется неравенство

$$r\sum l(k)f(x(k)) < d, \text{ но } \sum l(k)c(k) > d. \quad (1)$$

Мы получили противоречие с условием 2). Таким образом, теорема практически доказана. Надо только честно проделать все выкладки.

Теперь приведем точные формулировки условий (*условия* (α)).

Через f обозначим искомую функцию над множеством X, разделяющую, множества A и B из X, где X — линейное нормированное пространство. Вопрос таков: может ли эта функция существовать и к тому же быть непрерывной, линейной и с ограниченной нормой.

Уточним понятие ассоциативной машины. Н. Нильсон называет ассоциативной машиной такую нейронную сеть, в которую включен нейрон, подсчитывающий результат комбинации голосов остальных нейронов. Этот нейрон определяет «демократию» над всеми нейронами. В данной статье A — это множество всех нейронов, кроме нейронов слоя R. И слой R как раз и задает «демократию».

Если искать просто какую-нибудь разделяющую функцию, без условий непрерывности и других, то ее легко выписать, надо только, чтобы множества A и B не пересекались. Но такая функция не имеет ни теоретического, ни практического смысла. Теперь сформулируем и докажем теорему разделимости.

Теорема (условие разделимости).

Пусть даны множества $A = \{x(i) : i \in I\}$, $B = \{x(i) : i \in J\}$. И пусть $c(i)$ — соответствующие им действительные числа. Тогда при любом $r \geq 0$ следующие условия эквивалентны:

1) Существует такая линейная непрерывная функция f, что норма ее не больше r и $f(x(i)) \geq c(i)$ для всех $i \in I$; $f(x(J)) < c(j)$ для всех $j \in J$.

2) Для любого конечного набора n индексов $i \in I$ и $j \in J$ (набора номеров $s \in S$) для поло-

жительных $e(s)$ при $s \in I$ и отрицательных при $j \in J$, существует такое решение, что:

$$r(\| \sum e(s)x(s) \| \geq \sum e(s)c(i).$$

Доказательство:

Запишем множество $T = A \cup (-B)$. Тогда можно сказать, что мы ищем функцию f, положительную на множестве T.

Очевидно, что из условия 1) следуют соотношения 2). Так что надо только доказать, что из 2 следует 1. Будем оперировать множеством T.

Предполагаем: дано, что при $r \geq 0$

$$r(\| \sum e(k)x(k) \| \geq \sum e(k)c(k)$$

для любого конечного набора индексов k.

Дальнейшее доказательство проходит по традиционной схеме. Методом от противного предполагаем, что 1) не выполняется, тогда вырисовываются два непересекающихся множества, они разделяются линейной функцией, и аналитическая запись этого факта приводит к противоречию условиям 1), 2).

Теперь переходим к уточнению деталей доказательства. Наше исходное предположение: $\boldsymbol{X}$ — действительное линейное нормированное пространство.

Предположим, что индексы конечной подсистемы заданы. Не нарушая общности, будем считать, что это индексы 1, …, n. Пусть c обозначает какую-нибудь положительную точку в $\boldsymbol{R}^n$ с координатами $x(1), \dots, x(n)$.

Введем множество P как множество точек из $\boldsymbol{R}^n$ с неотрицательными координатами. Пространство, сопряженное с пространством X, мы обозначили через X^*.

Следующий этап доказательства приведен выше: условия (α), 1) и 2).

Теорема доказана.

Насколько жесткими являются эти условия? Не могут линейные методы решать сложные задачи, даже если они снабжены операциями сигмоидов. Окончательное звено доказательства — введенное выше условие (α).

Кроме того, на практике надо решить вопрос о выборе классов функций, адекватных сложным противоречивым зависимостям. Разумеется, не всегда надо совершенно точно отражать материал обучения из-за опасности оверфиттинга. Но надо только все-таки убедиться, что вообще существует функция с требуемыми свойствами. Оказывается, достаточно использовать комитеты аффинных функций.

Для анализа метода построения нейронной сети мы используем сопряженную модель. Для этого понадобятся следующие обозначения.

В пространстве $\boldsymbol{R}^n$ заданы множества M и N:

$$M = (v = x(p) + y(q) : p \in P, q \in Q),$$
$$N = \{v : v = z(t), t \in T\}.$$

Здесь N — подмножество множества $\{v : a \leq \leq v \leq b\}$.

Обозначим через DA (M, N, F) задачу разделения множеств M и N функцией класса F. Здесь F — класс неотрицательных линейных функций. Для всякого i строим сопряженную задачу:

$$DA(M, N, F) =$$
$$= \{i : \inf\ x(i, p) : x(j, p) \leq 0\ (j = 1, \dots, n) : p \in P\} =$$
$$= \mu(i).$$

После некоторых выкладок мы приходим к паре двойственных друг другу задач, отвечающих седловой точке функции $f(x(p))$.

Далее мы говорим о нейронной системе (а не сети), если множество нейронов бесконечно. И.И. Ерёмин и Вл. Д. Мазуров рассмотрели случай счетного множества нейронов. Также рассмотрен случай произвольной мощности, опираясь на работы С.Н. Черникова, Фань Цзи и Н.Н. Астафьева. Из статьи И.И. Ерёмина можно вывести условие для континуальной мощности.

Мы можем ориентироваться на использование комитетных алгоритмов с различными логиками «демократии». А с оверфиттингом можно справиться, если пошагово добавлять нейроны и остановиться на шаге, при котором получается удовлетворительное качество решения.

Есть неформализованные задачи математической экономики. Они подразделяются на формализуемые и неформализуемые. Для формализуемых задач готов арсенал средств формализации, например распознавание образов. В случае неформализуемых задач надо следить за динамикой появления последовательности противоречащих примеров. Важно находить максимально «неприятные» примеры приближений, то есть надо строить опровергающие построенную разделяющую множества функции примеры объектов.

Список источников

1. *Астафьев Н. Н.* Линейные неравенства и выпуклость. — Свердловск: УрГУ, 1980.

2. *Белецкий Н. Г.* Применение комитетов для многоклассовой классификации // Численный анализ решения задач линейного и выпуклого программирования. — Свердловск: УНЦ АН СССР, 1983.

3. *Гайнанов Д. Н.* Комбинаторная геометрия и графы в анализе несовместных систем и распознавании образов. — М.: Наука, 2014.

4. *Гейл Д.* Теория линейных экономических моделей. — М.: Изд-во иностр. лит., 1963.

5. *Ерёмин И.И., Мазуров Вл. Д.* Итерационный метод обучения дискриминации бесконечных множеств // Кибернетика. — 1977. — № 5.

6. *Мазуров Вл. Д.* Очерк истории нейроматематики // Информационный бюллетень Ассоциации математического программирования. — 1996. — № 6.

7. *Никайдо Х.* Выпуклые структуры и математическая экономика. — М.: Мир, 1973.

8. *Чарин В. С.* Линейные преобразования и выпуклые множества. — линейные преобразования и выпуклые множества. — Киев, 1978.

9. *Черникова Н. В.* Алгоритм для нахождения общей формулы неотрицательных решений системы линейных неравенств // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1965. — Т. 5. — № 2.

10. *Черников С. Н.* Линейные неравенства. — М.: Наука, 1968.

11. *Хачай М. Ю.* Комитетные решения несовместных систем ограничений и методы обучения распознаванию: дис. д-ра физ.-мат. наук. — Екатеринбург, 2004. — 175 с.

12. *Berkeley Geo*rge. Treatise concerning the principles of human knowledge. — Oxford, 1871.

13. *Heisenberg W.* Der Teil und das Ganze. — Muenchen, 1969.

14. *Heisenberg W.* Physik und Philosophie. — Frankfurt am Main, 1959.

15. *Kuhn H.* (edit.) Linear inequalities. — New York: Prinseton University press, 1956.