УДК 338.2

ВЕРОЯТНОСТНО-ДИНАМИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ТЕОРИИ ПОТРЕБИТЕЛЬСКОГО ПОВЕДЕНИЯ [1]

В. А. Славин, И. Н. Урусова

Статья посвящена применению вероятностно-динамического метода к исследованию поведения индивидуального потребителя. Основу изложения составляет понимание потребителя как динамической системы, фазовые переменные которой имеют смысл компонент вектора принимаемых решений, а функция Гамильтона выступает мерой способности системы к выбору решений, формирующих оптимальное потребительское поведение.

Функция Гамильтона потребителя представлена в виде диагональной квадратичной формы, коэффициентами которой являются полезности полного набора потребляемых благ и каждого блага как функции материальной составляющей фазового пространства системы. Получено выражение для полезности полного набора в виде модифицированной функции фон Неймана — Моргенштерна, определенной на простой лотерее набора благ.

Установлена размерность величины полезности — ютиль, совпадающая с размерностью функции Гамильтона и равная единице измерения скорости оборота денежных средств в системе.

Найдены асимптотики функций полезностей каждого блага в области их насыщения (асимптотики первого закона Госсена), позволившие сформулировать условия устойчиво равновесного потребления субъекта. Показано, что равновесие потребительского поведения является следствием условия его оптимальности и заключается в однородности распределения полезностей благ, равных по величине максимальной полезности полного набора.

Исследованы экстремальные свойства функции полезности набора благ, определяющие законы оптимального потребительского спроса в условиях заданного распределения цен на блага и доходе потребителя, а также при фиксированном значении объема полного набора. Показано, что в обоих случаях требование оптимальности (равновесия) поведения индивида формулируется в виде второго закона Госсена об инвариантности предельной полезности дополнительно вводимых средств, обеспечивающих данное потребительское поведение.

Результаты настоящего исследования, проведенного с использованием явного выражения для модифицированной функции фон Неймана — Моргенштерна, позволяют обосновать и расширить представления сравнительной статики потребления, полученные ранее в рамках модельных методов неоклассической теории.

Ключевые слова: вероятностно-динамический метод; функция Гамильтона; полезность фон Неймана — Моргенштерна; равновесное потребление; оптимальная функция спроса; сравнительная статика потребления

Введение. Постановка задачи

Учение о поведении потребителя занимает центральное место в системе экономических знаний, поскольку ориентирует все сферы хозяйственной деятельности субъекта на эффективное решение основной задачи экономики — насыщение потребительского рынка экономическими благами.

Рожденная в ходе маржиналистской революции, теория потребительского поведения

[1] Авторы благодарны Акбердиной В. В., Петрову М. Б. и Горбунову В. К. за плодотворные дискуссии и полезные замечания.

развивалась благодаря изменению взглядов исследователей на природу важнейшего понятия теории — полезности благ. От объективных (классических) представлений о полезности товара как мере издержек производства и количества вложенного в него труда [10] был совершен переход к субъективным (неоклассическим) взглядам, в которых полезность рассматривалась как мера способности блага к удовлетворению потребности человека в определенном количестве этого блага [8].

Одновременно с этим претерпевала изменение система представлений о природе потребительского спроса и ценности блага. Если в работах классиков понятия полезности и ценности практически отождествлялись, то в ходе решения «парадокса о воде и алмазе», поставленного А. Смитом, сторонники маржинализма пришли к необходимости формулировки принципа убывающей предельной полезности [1], позволившего объяснить экономический смысл закона потребительского спроса и ценности как меновой стоимости товара [3].

Дальнейшее развитие теории потребления связано с преодолением трудностей, возникающих при решении проблемы измерения величины полезности. Так, субъективизм неоклассического понимания полезности не позволял последовательно вводить выражение для единицы ее измерения (ютиль). Предложенный же М. Джевонсом [3] косвенный метод измерения полезности в виде количества денег, которое потребитель готов заплатить за товар (впоследствии усовершенствованный А. Маршаллом с помощью понятия потребительского излишка [7]), также не решал проблему измерения, поскольку применялся лишь к малым изменениям цен, не меняющим доход потребителя.

Отмеченные выше трудности привели экономистов к необходимости аксиоматического определения полезности набора благ как дифференцируемой функции, заданной в векторном пространстве благ с характерной для нее системой бинарных отношений предпочтения [6]. В предположении строгой выпуклости функции полезности в работе [9] поставлена и решена неоклассическая задача на отыскание оптимальной функции спроса, обеспечивающей максимум полезности при заданном распределении цен на блага и доходе потребителя. Результаты решения неоклассической задачи использованы при анализе так называемых уравнений сравнительной статики [13], определяющих зависимости спроса от величины дохода и вектора цен, включая случай компенсирующего изменения дохода (задача Слуцкого). Описаны возможные типы потребляемых благ, отвечающие различным формам проявления закона спроса.

Последующее развитие теории потребительского поведения связано с применением аппарата теории игр [11], в котором понятие векторного пространства благ обобщено представлением о лотерее потребителя как законе распределения полезностей $\beta(\vec{b})$ возможных наборов благ $\vec{b}$. На основании отмеченных выше аксиом предпочтения в работе [11] введена функция полезности фон Неймана — Моргенштерна как математическое ожидание лотереи потребителя, в которой полный набор благ $\vec{b}$ реализуется с вероятностью $w(\vec{b})$:

$$\beta = \sum_{\vec{b}} \beta\left(\vec{b}\right) w\left(\vec{b}\right). \qquad (1)$$

Решая вариационную задачу на условный максимум этой функции (при условии нормировки вероятностей $w(\vec{b})$), можно найти закон распределения случайного спроса на блага полного набора и величину ожидаемой полезности.

Следует, однако, отметить, что в отсутствие явного выражения для функции полезности полного набора решение указанных вариационных задач сводилось к анализу дифференциальных уравнений в частных производных, возникающих в ходе их постановки, что представлялось весьма сложным и неудобным для экономических приложений.

В работе [4] предложен вероятностно-динамический метод исследования законов потребительского поведения. В основе этого метода лежит представление о потребителе как динамической системе, степенями свободы которой являются квазинезависимые связи α, возникающие между индивидуумом и каждым благом полного набора в ходе его потребления. Фазовые переменные, отвечающие степеням свободы α, образуют двумерные векторы α-решений

$$\vec{s}_{\alpha} = \left(b_{\alpha}, x_{\alpha}\right), \qquad (2)$$

обеспечивающие приобретение и потребление благ α. Здесь величины x_{α} характеризуют формирование α-статьи потребительского бюджета индивида и измеряются в единицах денежных средств: $[x_{\alpha}]$ = Rub., \$, € и др.; единицами измерения величин b_{α} являются количества потребляемых благ: $[b_{\alpha}] = 1$.

Согласно основным принципам вероятностно-динамического метода [5], компоненты α-решения являются случайными величинами, распределения которых описываются функцией потребительского состояния

$|\Psi_\alpha, t\rangle$. Процесс измерения фазовых переменных (процесс принятия α-решения), формирующий законы распределения $|\langle x_\alpha|\Psi_\alpha, t\rangle|^2$ и $|\langle b_\alpha|\Psi_\alpha, t\rangle|^2$ величин (2), генерируется векторным оператором

$$\hat{\vec{s}}_\sigma = \left(\hat{b}_\sigma, \hat{x}_\sigma\right); \left[\hat{b}_\sigma, \hat{x}_\sigma\right] = -i\lambda \tag{3}$$

и описывается разложениями исследуемых функций $\hat{x}_\sigma|\Psi_\alpha.\, t\rangle$ и $\hat{b}_\sigma|\Psi_\alpha.\, t\rangle$ по собственным функциям операторов измеряемых величин:

$$\hat{x}_\sigma\left|\Psi_\alpha.t\right\rangle = \int x_\alpha\left|x_\alpha\right\rangle\langle x_\alpha \mid \Psi_\alpha, t\rangle; \tag{4}$$

$$\hat{b}_\sigma\left|\Psi_\alpha.t\right\rangle = \sum_k b_\alpha^{(k)}\left|b_\alpha^{(k)}\right\rangle\langle b_\alpha^{(k)} \mid \Psi_\alpha, t\rangle. \tag{5}$$

Параметр λ, входящий в выражение для коммутатора в (3), классифицирует механизмы хозяйственной деятельности субъекта (рыночный, смешанный и плановый, как предельный случай рыночного при $\lambda \to 0$) и называется рыночным параметром теории.

Важно отметить, что процесс принятия α-решения имеет оптимальный характер, критерием которого является требование неразрывности потоков денежных и материальных, формирующих данное потребительское состояние [5].

Генератором способности потребителя к принятию оптимального решения $\vec{s} = (\vec{s}_\alpha)$ является оператор Гамильтона динамической системы [5]:

$$\hat{P}\left(\hat{\vec{s}}, t\right) = \frac{\beta\left(\hat{\vec{b}}\right)\hat{\vec{b}}^2}{2} + U\left(\vec{x}, t\right) =$$

$$= \sum_\alpha \left(\frac{\beta_\alpha\left(\hat{b}_\alpha\right)\hat{b}_\alpha^2}{2} + U_\alpha\left(x_\alpha, t\right)\right) \equiv \sum_\alpha \hat{P}_\alpha\left(\hat{\vec{s}}_\sigma, t\right). \tag{6}$$

Здесь $\hat{\vec{b}} = -i\lambda\dfrac{\partial}{\partial\vec{x}}$; $\hat{b}_\alpha = -i\lambda\dfrac{\partial}{\partial x_\alpha}$; коэффициенты $\beta(\hat{\vec{b}})$ и $\beta_\alpha(\hat{b}_\alpha)$ называются операторами полезности полного набора благ $\vec{b}$ и каждого блага b_α этого набора, соответственно, и являются характеристиками потребительских свойств благ.

Слагаемое $U\left(\vec{x}, t\right) = \sum_\alpha U_\alpha\left(x_\alpha, t\right)$ в гамильтониане (6), называемое функцией потребительского бюджета, аддитивно по функциям $U_\alpha(x_\alpha, t)$ отдельных α-статей бюджета и характеризует распределение денежной компоненты α-решений в области неопределенности бюджета. В простейшем случае функции $U_\alpha(x_\alpha, t)$ отвечают однородному распределению величины x_α и имеют вид не зависящей от времени прямоугольной ямы с конечной высотой V_α и шириной $\Delta x_\alpha = x_{2\alpha} - x_{1\alpha}$ (см. рис. 1в [4]):

$$U_\alpha\left(x_\alpha\right) = \begin{cases} 0, x_\alpha \in \left[x_{1\alpha}, x_{2\alpha}\right]; \\ V_\alpha, x_\alpha \notin \left[x_{1\alpha}, x_{2\alpha}\right]. \end{cases} \tag{7}$$

Высота бюджетной ямы V_α равна предельному значению величины P_α, характеризующему максимальную способность субъекта к принятию α-решения в условиях заданной неопределенности α-статьи потребительского бюджета Δx_α.

Отметим, что состояния потребителя в поле однородной бюджетной ямы (7) описывают статические свойства динамической системы, не возмущенные взаимодействием ее с внешними системами — аспектами потребительского рынка.

Основная задача вероятностно-динамической теории потребления заключается в интегрировании уравнения Шредингера — Беллмана

$$\hat{P}_\alpha\left(\hat{\vec{s}}_\sigma, t\right)\left|\Psi_\alpha.t\right\rangle = i\lambda\frac{\partial\left|\Psi_\alpha.t\right\rangle}{\partial t}, \tag{8}$$

позволяющего найти распределения компонент α-решения и их числовые характеристики (математические ожидания, дисперсии и ковариации), несущие необходимую информацию о законах потребительского поведения.

В статье [4] найдены уровни дискретного спектра способности потребителя $P_{\alpha k}^{(\pm)}$ в области насыщения бюджетной ямы ($P_{\alpha k}^{(\pm)} \lesssim V_\alpha$):

$$P_{\alpha k}^{(\pm)} = \frac{8\pi^2\beta_{\alpha m}\lambda^2}{\Delta x_\alpha^2}\left(k - \frac{1}{4}\right)^2\left(1 \pm \varepsilon_k\right), \tag{9}$$

где $\varepsilon_k \approx \sqrt{2}\sqrt{1 - \dfrac{k}{n}}$ $(1 << k \le n - 1)$; $n = \left[\sqrt{\dfrac{V_\alpha\Delta x_\alpha^2}{8\pi^2\beta_{\alpha m}\lambda^2}}\right]$;

$[x]$ — целая часть числа x; $\beta_{\alpha m}$ — собственное значение оператора полезности блага α в области насыщения.

Формула (9) показывает, что активизация способности потребителя проявляется в типично рыночном случае (λ велико) при выборе блага большой полезности $\beta_{\alpha m}$ индивидом с малой неопределенностью потребительского бюджета Δx_α. Такое поведение характерно для «бедных» потребителей, для которых выбор блага усложняется недостаточностью денежных средств $x_\alpha \in [x_{1\alpha}, x_{2\alpha}]$, сопряженных с малой неопределенностью бюджета Δx_α.

Спектр оператора способности $P_{\alpha k}^{(\pm)}$ определяет допустимые значения $b_{\alpha k}^{(\pm)}$ блага, формирующие оптимальный потребительский спрос индивида:

$$b_{\alpha k}^{(\pm)} = \sqrt{\frac{2P_{\alpha k}^{(\pm)}}{\beta_{\alpha m}}} \approx \frac{4\pi\lambda}{\Delta x_\alpha}\left(k - \frac{1}{4}\right)\left[1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1 - \frac{k}{n}}\right]. \tag{10}$$

Так, максимальное значение $b_{\alpha n}^{(\pm)}$ блага полезности $b_{\alpha m}$, приобретаемого при заданных параметрах V_α, Δx_α бюджетной ямы, составляет

$$b_{\alpha n}^{(+)} = \frac{4\pi\lambda}{\Delta x_\alpha} n = \sqrt{\frac{2V_\alpha}{\beta_{\alpha m}}}. \qquad (11)$$

Формула (11) находится в соответствии с первым законом Госсена: количество благ, обеспечивающих насыщение большей полезности, оказывается меньше количества благ, обеспечивающих насыщение меньшей полезности.

С уменьшением неопределенности бюджетной ямы Δx_α уменьшается максимальное число линий спектра благ n и, следовательно, увеличивается расстояние между соседними уровнями. Этот вывод также характерен для потребления «бедного» субъекта, который не может позволить себе излишеств при выборе благ. Напротив, при больших значениях Δx_α (в случае «богатого» субъекта) становится возможным создание потребительского поведения с богатым спектром закупаемых благ.

В плановом режиме потребления (в пределе при $\lambda \to 0$) ширина неопределенностей α-статей бюджета стремится к нулю ($\Delta x_\alpha \to 0$), вследствие отсутствия разброса цен на блага; поэтому стремится к нулю сама бюджетная функция (7) и дискретный спектр (9) вырождается в непрерывную функцию способности (функцию Гамильтона)

$$P = \sum_\alpha \frac{\beta_\alpha(b_\alpha) b_\alpha^2}{2} = \frac{\beta(\vec{b}) b^2}{2}. \qquad (12)$$

Из соотношения (12) вытекает выражение для функции полезности полного набора благ:

$$\beta(\vec{b}) = \sum_\alpha \beta_\alpha(b_\alpha) \frac{b_\alpha^2}{b^2}; \quad b^2 = \sum_\alpha b_\alpha^2, \qquad (13)$$

представляющее собой математическое ожидание полезностей $\beta_\alpha(b_\alpha)$ благ α полного набора $\vec{b}$, элементы которого распределены в фазовом пространстве с геометрическими вероятностями b_α^2 / b^2. Эту формулу можно рассматривать как модифицированную функцию фон Неймана — Моргенштерна простой лотереи $L_{\vec{b}} = \left\{ \left(\beta_\alpha(b_\alpha), \frac{b_\alpha^2}{b^2} \right) \right\}$, входящей в сложную лотерею $L = \left\{ \left(\beta(\vec{b}), w(\vec{b}) \right) \right\}$ с вероятностью $w(\vec{b})$ (см. [11]).

В отличие от функции фон Неймана — Моргенштерна общего вида (1), формула (13) определяет полезность набора благ $\vec{b}$ в явном виде, содержащем известные функции $\beta_\alpha(b_\alpha)$ каждого блага набора (см. рис. 1). Благодаря этому результаты исследования модифицированной функции (13) могут существенно расширить законы теории потребления, ранее полученные в рамках модельного подхода к решению неоклассической задачи [6]. В частности, формула (12) позволяет установить размерность величины полезности (ютиль), которая совпадает с размерностью функции Гамильтона и равна, в соответствии с уравнением Шредингера — Беллмана (8), единице измерения скорости оборота денежных средств в системе:

$$[\beta] = [\beta_\alpha] = [P_\alpha] = \left[\frac{\lambda}{t}\right] = \frac{\$}{c}. \qquad (14)$$

Таким образом, 1 ютиль = 1 \$ / c.

Важно подчеркнуть, что широкое использование формализма функции Гамильтона (12), как характеристики способности потребителя к оптимальному выбору благ, свидетельствует о возможности аппарата вероятностно-динамического метода описывать субъективные оценки индивидами потребительских свойств благ, явившиеся «движущими силами» маржиналистской революции, совершенной в классической экономической теории.

Настоящее сообщение посвящено дальнейшему исследованию функции ожидаемой полезности (13) в условиях оптимального поведения потребителя и включает в себя: 1) нахождение асимптотики первого закона Госсена в области насыщения полезности блага и вытекающее отсюда установление условий равновесного поведения потребителя с описанием природы его устойчивости; 2) отыскание оптимальной функции спроса потребителя, обеспечивающей максимум функции ожидаемой полезности (13) при заданном объеме полного набора благ b_0 и известном распределении цен $\{p_\alpha\}$ на блага $\{b_\alpha\}$ полного набора и доходе I потребителя; 3) анализ уравнений сравнительной статики, позволяющий описать чувствительность оптимального спроса и полезности дополнительно вводимых средств потребительского поведения от основных параметров задачи.

Асимптотика первого закона Госсена в области насыщения полезности. Условие устойчивости равновесного потребительского поведения

Изучим поведение функций полезности блага $\beta_\alpha(b_\alpha)$ и полного набора благ $\beta_\alpha(\vec{b})$ при больших значениях b_α, при которых, в соответствии с формулами (9) и (10), спектр допустимых значений способности $P_{\alpha n}$ и благ $b_{\alpha n}$ становится непрерывным при приближении к предельным величинам V_α и $b_{\alpha m}$:

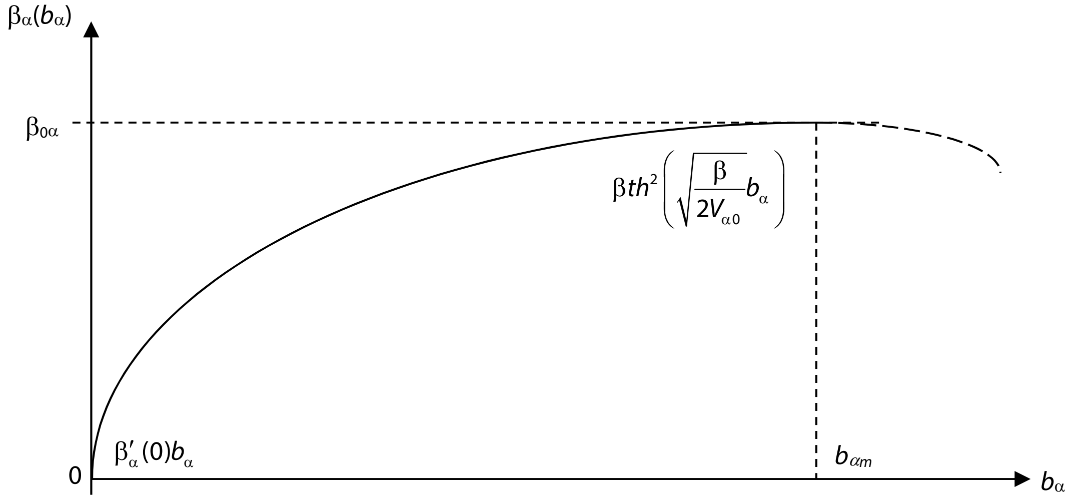

Рис. 1. *Кривая полезности блага α (первый закон Госсена) с указанием граничных асимптотик*

$$P_{\alpha n}\left(b_{\alpha n}\right)\to V_{\alpha}-0.b_{\alpha n}\to b_{\alpha m}-0. \qquad (15)$$

Кроме этого, к конечной величине при больших $b_{\alpha n}$ стремится и функция полезности $b_{\alpha}(b_{\alpha n})$ (см. рис. 1):

$$\beta_{\alpha}\left(b_{\alpha n}\right)\to\sqrt{\frac{2V_{\alpha}}{b_{\alpha n}^{2}}}\equiv\beta_{\alpha m}; \qquad (16)$$

причем

$$\frac{\Delta\beta_{\alpha n}}{\Delta b_{\alpha n}}\to 0, b_{\alpha n}\to b_{\alpha m}. \qquad (17)$$

Соотношения (16), (17) описывают явление насыщения полезности благ.

Продифференцируем функцию (13) по переменной b_{α}, переходя от дискретного спектра $\{b_{\alpha n}\}$ к квазинепрерывному $\{b_{\alpha}\}$:

$$\frac{\partial\beta\left(\vec{b}\right)}{\partial b_{\alpha}}=-\frac{2b_{\alpha}}{b^{4}}\sum_{\alpha}\beta_{\alpha}\left(b_{\alpha}\right)b_{\alpha}^{2}+$$
$$+\frac{1}{b^{2}}\left(\beta_{\alpha}^{'}b_{\alpha}^{2}+2\beta_{\alpha}\left(b_{\alpha}\right)b_{\alpha}\right)=$$
$$=\frac{1}{b^{2}}\left[\beta_{\alpha}^{'}b_{\alpha}^{2}+2b_{\alpha}\left(\beta_{\alpha}-\beta\right)\right]. \qquad (18)$$

Здесь $\beta_{\alpha}'=\dfrac{\partial\beta_{\alpha}\left(b_{\alpha}\right)}{\partial b_{\alpha}}$ функция предельной полезности блага b_{α}.

В условиях оптимального поведения потребителя функция полезности набора благ $\beta(\vec{b})$ достигает максимального значения. Поэтому, если на процесс потребления не наложены условия ограничения, левая часть равенства (18) обращается в нуль, откуда следует выражение для компонент b_{α} оптимального вектора $\vec{b}$:

$$b_{\alpha}=\frac{2\left(\beta-\beta_{\alpha}\right)}{\beta_{\alpha}'}. \qquad (19)$$

Формула (19) позволяет определить значение величины $b_{\alpha}=b_{\alpha m}$, при котором полезность блага b_{α} удовлетворяет соотношениям (16), (17). Поскольку в этом случае предельная полезность $\beta_{\alpha}'\to 0$, величину $b_{\alpha m}$ найдем, как решение системы уравнений

$$\beta=\beta_{\alpha},\forall\alpha; \qquad (20)$$

$$b_{\alpha m}=\lim_{\beta_{\alpha}'\to 0}\frac{2\left(\beta-\beta_{\alpha}\right)}{\beta_{\alpha}'}. \qquad (21)$$

Заметим, что при достижении максимального значения (16) при $b_{\alpha}=b_{\alpha m}$ производная функции полезности β_{α}' меняет знак ($\beta_{\alpha}'<0$) что отвечает эффекту пресыщения потребителя благом α при потреблении его в количестве $b_{\alpha}>b_{\alpha m}$.

Найдем асимптотику функции $\beta_{\alpha}(b_{\alpha})$ при значениях $b_{\alpha}=b_{\alpha m}-0$. Для этого преобразуем формулу (21) в дифференциальное уравнение, заменяя левую часть в ней на $b_{\alpha}=\sqrt{2V_{\alpha}/\beta_{\alpha}}\approx b_{\alpha m}$ (см. (11)):

$$\frac{d\beta_{\alpha}}{db_{\alpha}}=2\left(\beta-\beta_{\alpha}\right)\sqrt{\frac{\beta_{\alpha}}{2V_{\alpha}}}. \qquad (22)$$

Разделяя переменные в (22):

$$\frac{d\beta_{\alpha}}{\left(\beta-\beta_{\alpha}\right)\sqrt{\beta_{\alpha}}}=\sqrt{\frac{2}{V_{\alpha 0}}}db_{\alpha} \qquad (23)$$

и интегрируя каждую часть полученного равенства, получим

$$\ln\left|\frac{\sqrt{\beta}+\sqrt{\beta_{\alpha}}}{\sqrt{\beta}-\sqrt{\beta_{\alpha}}}\right|=\sqrt{\frac{2\beta}{V_{\alpha}}}b_{\alpha}+C_{\alpha}, \qquad (24)$$

где C_{α} — константа интегрирования, которую при $b_{\alpha}\approx b_{\alpha m}$ можно положить равной нулю. В результате элементарных преобразований находим искомое выражение

$$\beta_\alpha\left(b_\alpha\right)=\beta th^2\left(\sqrt{\frac{\beta}{2V_\alpha}}b_\alpha\right), \qquad (25)$$

представляющее собой асимптотику первого закона Госсена в области насыщения благ (см. рис. 1, на котором также изображена нулевая асимптотика функции полезности $\beta_\alpha(b_\alpha)$, найденная в работе [4]).

Покажем, что равенство (20) можно рассматривать как условие устойчиво равновесного поведения потребителя. Для этого выделим в выражении (13) слагаемое, отвечающее какому-либо благу $\bar{\alpha}$ из полного набора:

$$\beta\left(\vec{b}\right)=\sum_\alpha\beta_\alpha\left(b_\alpha\right)b_\alpha^2=\frac{\beta_{\bar{\alpha}}\left(b_{\bar{\alpha}}\right)b_{\bar{\alpha}}^2}{b^2}+\overline{\beta_{\bar{\alpha}}}\left(1-\frac{b_{\bar{\alpha}}^2}{b^2}\right) \qquad (26)$$

и предположим, что полезность блага $\bar{\alpha}$ превышает ожидаемую полезность набора: $\beta_{\bar{\alpha}}\left(b_{\bar{\alpha}}\right)>\beta\left(\vec{b}\right)$. В этом случае из (26) следует, что средняя полезность $\overline{\beta_{\{\alpha'\}}}$ остального набора благ $\{\alpha'\}\left(\bar{\alpha}\notin\{\alpha'\}\right)$ окажется меньше полезности всего набора:

$$\overline{\beta_{\{\alpha'\}}}=\frac{\beta-\beta_{\bar{\alpha}}\dfrac{b_{\bar{\alpha}}^2}{b^2}}{\left(1-\dfrac{b_{\bar{\alpha}}^2}{b^2}\right)}<\beta. \qquad (27)$$

Выделим теперь в этом наборе $\{\alpha'\}$ элемент $\bar{\bar{\alpha}}$ и положим, что $\beta_{\bar{\bar{\alpha}}}<\beta\left(\vec{b}\right)$. Тогда из аналогичных рассуждений получим, что средняя полезность $\overline{\beta_{\alpha''}}$ оставшегося набора $\{\alpha''\}\left(\bar{\bar{\alpha}}\notin\{\alpha''\}\right)$ превышает ожидаемую полезность всего набора: $\overline{\beta_{\alpha''}}>\beta$. И так далее. Нетрудно видеть, что при выполнении начального неравенства противоположного знака $\beta_{\bar{\alpha}}\left(b_{\bar{\alpha}}\right)<\beta\left(\vec{b}\right)$ получаемые результаты лишь знаками будут отличаться от приведенных выше.

Таким образом, если полезность хотя бы одного из благ полного набора отличается от полезности остальных благ, то в таком наборе возникает неоднородное (неравновесное) распределение полезностей. При этом, чем больше начальное возмущение полезности, тем выше степень возникающей неоднородности, что свидетельствует о наличии неустойчивости созданного возмущения.

С экономической точки зрения неустойчивость неоднородного распределения полезностей полного набора благ связана с субъективным ощущением неудовлетворенности индивида процессом потребления такого набора, вызванного различием психологических механизмов реакции на блага неодинаковой полезности. Результатом этого различия является стремление индивида к равновесному потреблению, характеризуемому однородным распределением полезностей благ полного набора в области их насыщения (20).

Поскольку равенства (20) и (21) вытекают из условия максимума функции ожидаемой полезности (13), понятия равновесного и оптимального потребительского поведения являются эквивалентными. В следующем разделе статьи этот вывод будет сделан исходя из второго закона Госсена с формулировкой, соответствующей рассмотренным ниже оптимизационным задачам (см. также [2], с. 64).

Оптимизация спроса в условиях заданного объема потребляемых благ

Вначале рассмотрим ситуацию, в которой индивид формирует набор потребительских благ, руководствуясь требованием ограничения объема этих благ и не интересуясь вопросом о рыночных способах их приобретения. В этом случае актуальной является задача вычисления оптимальной функции спроса потребителя

$$\vec{b}=(b_\alpha), \qquad (28)$$

удовлетворяющей условию постоянства объема потребляемых благ

$$\vec{b}^2=\sum_\alpha b_\alpha^2=b_0^2=const, \qquad (29)$$

и обеспечивающей максимум функции полезности (13):

$$\beta\left(\vec{b}\right)=\frac{1}{b^2}\sum_\alpha\beta_\alpha\left(b_\alpha\right)b_\alpha^2\to\max. \qquad (30)$$

Для решения задачи введем функцию Лагранжа

$$L\left(\vec{b};\delta\right)=\frac{1}{b^2}\sum_\alpha\beta_\alpha\left(b_\alpha\right)b_\alpha^2-\delta\left(\sum_\alpha b_\alpha^2-b_0^2\right), \qquad (31)$$

где δ — неопределенный множитель Лагранжа, и запишем необходимые условия максимума функции (31) в виде системы $n+1$ уравнений относительно неизвестных b_α и δ:

$$\begin{cases}\dfrac{1}{b^2}\left[\beta'_\alpha b_\alpha^2+2b_\alpha\left(\beta_\alpha-\beta\right)\right]-2\delta b_\alpha=0;\\ \sum_\alpha b_\alpha^2-b_0^2=0.\end{cases} \qquad (32)$$

Учитывая условие равновесного потребления (20), преобразуем систему (32) к виду

$$\begin{cases}\beta'_\alpha b_\alpha-2\delta b^2=0;\\ \sum_\alpha b_\alpha^2=b^2=b_0^2,\end{cases} \qquad (33)$$

из которой вытекает, что

$$b_\alpha = \frac{2\delta b_0^2}{\beta'_\alpha}. \tag{34}$$

Находя множитель Лагранжа из условия нормировки (29):

$$\delta(b_0, \eta) = \frac{1}{2b_0}\frac{1}{\eta} = \frac{\partial \beta}{\partial b_0^2}, \tag{35}$$

из (34) получаем окончательное выражение для вектора благ — функцию оптимального спроса (см. рис. 2):

$$\vec{b}(b_0, \vec{\eta}) = b_0 \frac{\vec{\eta}}{\eta}, \tag{36}$$

где $\vec{\eta} = \left(\frac{1}{\beta'_\alpha}\right)$ — вектор обратных предельных полезностей благ; $\eta = \left(\sum_\alpha \frac{1}{\beta'^2_\alpha}\right)^{\frac{1}{2}}$ — модуль вектора $\vec{\eta}$.

Обсудим экономический смысл полученных результатов (35) и (36). Согласно (35), при заданном объеме благ b_0 оптимальное потребление происходит при условиях, при которых скорость изменения ожидаемой полезности β с изменением объема b_0^2 (описываемая множителем Лагранжа δ) одинакова для всех благ. Это утверждение, представляющее собой второй закон Госсена, согласуется с условием равномерного распределения функций полезности благ полного набора (20) и выражает, тем самым, условие устойчиво равновесного потребительского поведения в области насыщения.

Функция оптимального потребления $\vec{b}(b_0, \vec{\eta})$ (36) является растущей функцией объема предоставляемых благ b_0, что выражает собой принцип неограниченного роста потребностей. Производные этой функции по предельным полезностям $\beta'_{\alpha'}$:

$$\frac{\partial b_\alpha}{\partial \beta'_{\alpha'}} = -b_0 \frac{\eta_\alpha \eta_{\alpha'}}{\eta}\left(\delta_{\alpha\alpha'} - \frac{\eta_{\alpha'}^2}{\eta^2}\right), \tag{37}$$

где $\delta_{\alpha\alpha'} = \begin{cases} 1, \alpha = \alpha' \\ 0, \alpha \neq \alpha' \end{cases}$ образуют матрицу, диагональные элементы которой отрицательны

$$\frac{\partial b_\alpha}{\partial \beta'_\alpha} = -b_0 \frac{\eta_\alpha^2}{\eta}\left(1 - \frac{\eta_\alpha^2}{\eta^2}\right) \sim -\frac{1}{\beta'^2_\alpha} \tag{38}$$

и описывают уменьшение оптимальной потребности в благе b_α с ростом его предельной полезности β'_α, что находится в соответствии с первым законом Госсена.

Недиагональные элементы матрицы (38), напротив, положительны:

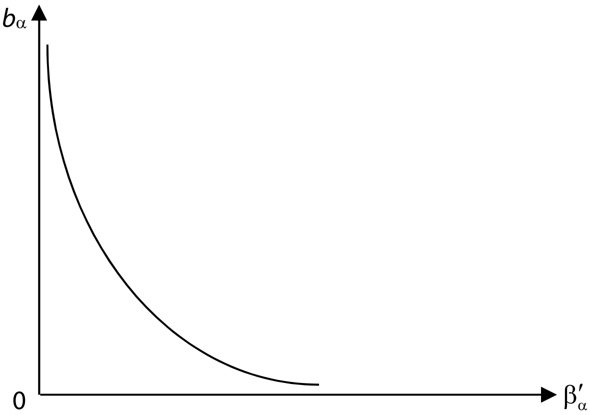

Рис. 2. *Зависимость величины спроса b_α от предельной полезности блага β'_α*

$$\frac{\partial b_\alpha}{\partial \beta'_{\alpha'}} = b_0 \frac{\eta_\alpha \eta_{\alpha'}{}^3}{\eta} \sim \frac{1}{\beta'_\alpha \beta'^3_{\alpha'}}, \alpha \neq \alpha'; \tag{39}$$

они характеризуют рост потребности индивида в благе b_α при увеличении качества $\beta'_{\alpha'}$ продукта $\alpha' \neq \alpha$. Такая зависимость вызвана тем, что в условиях сохраняющегося полного объема благ b_0 уменьшение блага $b_{\alpha'}$ (вследствие увеличения ее предельной полезности $\beta'_{\alpha'}$) должно компенсироваться ростом количества других продуктов α в наборе.

Формула (39) показывает, что величина производной $\frac{\partial b_\alpha}{\partial \beta'_{\alpha'}}$ может быть существенно увеличена за счет снижения ценности $\beta'_{\alpha'}$ блага α'. Отсюда вытекает, что в оптимальном наборе благ увеличение спроса на высококачественные блага $\{b_\alpha\}$ определяется ростом качества малоценных продуктов $\{b_{\alpha'}\}$. В этом смысле высококалорийные продукты оптимального стола должны сочетаться с низкокалорийными продуктами высокого качества (салатами, деликатесами и пр.).

Отметим в заключение этого пункта, что вторые частные производные средней полезности полного набора благ $\beta(\vec{b})$

$$\frac{\partial^2 \beta}{\partial b_\alpha \partial b_{\alpha'}} = \frac{1}{b^4} \times$$
$$\times \left[\left(4\beta'_\alpha b_\alpha + \frac{\partial^2 \beta_\alpha}{\partial b_\alpha^2} b_\alpha{}^2\right) b^2 \delta_{\alpha\alpha'} - 2b_\alpha b_{\alpha'}\left(\beta'_{\alpha'} b_{\alpha'} + \beta'_\alpha b_\alpha\right)\right] \tag{40}$$

образуют симметричную матрицу Гессе. Нетрудно убедиться в том, что эта матрица является отрицательно определенной, что свидетельствует о выполнении, наряду с необходимыми условиями (33), и достаточного признака максимума функции $\beta(\vec{b})$.

Регулярно-динамический аспект решения неоклассической задачи потребительского поведения

Обратимся к неоклассической задаче потребления [6], заключающейся в нахождении вектора полного набора благ

$$\vec{b} = (b_\alpha), \qquad (41)$$

который при заданном векторе цен

$$\vec{p} = (p_\alpha) \qquad (42)$$

и доходе потребителя I обеспечивает максимум функции полезности

$$\beta(\vec{b}) = \frac{1}{b^2}\sum_\alpha \beta_\alpha(b_\alpha) b_\alpha^2 \to \max \qquad (43)$$

при соблюдении условия полного использования средств дохода I для приобретения и потребления благ полного набора:

$$I = \sum_\alpha p_\alpha b_\alpha = (\vec{p}, \vec{b}). \qquad (44)$$

Вводя функцию Лагранжа

$$L(\vec{b}, \mu) = \frac{1}{b^2}\beta(\vec{b}) - \mu\left[(\vec{p}, \vec{b}) - I\right], \qquad (45)$$

где μ — множитель Лагранжа, запишем необходимые условия экстремума:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial b_\alpha} = \dfrac{\partial \beta}{\partial b_\alpha} - \mu p_\alpha = 0; \\ \dfrac{\partial L}{\partial \mu} = (\vec{p}, \vec{b}) - I = 0. \end{cases} \qquad (46)$$

Достаточное условие максимума, как и в предыдущей задаче, формулируется в виде отрицательной определенности матрицы Гессе (40).

При выполнении условий равновесного потребления (20) систему уравнений (46) можно переписать в виде

$$\begin{cases} \dfrac{\mu_\alpha}{\mu} b_\alpha^2 = \sum_{\alpha'} b_{\alpha'}^2; \\ \sum_\alpha p_\alpha b_\alpha = I, \end{cases} \qquad (47)$$

где

$$\mu_\alpha = \frac{\beta'_\alpha}{p_\alpha} = \frac{\partial \beta_\alpha}{\partial I} \qquad (48)$$

предельная полезность α-статьи потребительского бюджета (см. (7)). Вводя обозначения $\vec{z} = (z_\alpha) = (b_\alpha^2)$, преобразуем первые n уравнений (47) в систему линейных однородных уравнений

$$\hat{A}\vec{z} = \sum_{\alpha'}\left(1 - \frac{\mu_\alpha}{\mu}\delta_{\alpha\alpha'}\right) z_{\alpha'} = 0. \qquad (49)$$

Условием существования нетривиального решения системы (49) является обращение в нуль определителя матрицы $\hat{A}$:

$$\left|\hat{A}\right| = \left|1 - \frac{\mu_\alpha}{\mu}\delta_{\alpha\alpha'}\right| = 0. \qquad (50)$$

Вычисляя этот определитель стандартными методами, получим

$$|A| = \frac{\prod_\alpha \mu_\alpha}{\mu^n} - \frac{\sum_i \prod_{\alpha \neq \alpha_i} \mu_\alpha}{\mu^{n-1}} = 0; \qquad (51)$$

отсюда вытекает равенство, определяющее множитель Лагранжа μ:

$$\frac{1}{\mu} = \frac{\sum_i \prod_{\alpha \neq \alpha_i} \mu_\alpha}{\prod_\alpha \mu_\alpha} = \sum_\alpha \frac{1}{\mu_\alpha}. \qquad (52)$$

Теперь уже нетрудно получить решение системы уравнений (49), записав его в виде $z_\alpha = \dfrac{\mu_1}{\mu_\alpha} z_1$ или

$$b_\alpha = \sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_\alpha}} b_1. \qquad (53)$$

Свободную переменную b_1 найдем, подставив (53) в условие нормировки (44):

$$b_1 = \frac{I}{\sqrt{\mu_1}}\left(\sum_{\alpha'} \frac{p_{\alpha'}}{\sqrt{\mu_{\alpha'}}}\right)^{-1},$$

откуда вытекает окончательное выражение для функции оптимального спроса (см. рис. 3):

$$\vec{b}(\vec{p}, I; \vec{\gamma}) = \vec{\gamma}\frac{I}{(\vec{p}, \vec{\gamma})}, \qquad (54)$$

где

$$\vec{\gamma} = \left(\frac{1}{\sqrt{\mu_\alpha}}\right) = \left(\sqrt{\frac{p_\alpha}{\beta'_\alpha}}\right). \qquad (55)$$

Согласно (46), решение неоклассической задачи потребления характеризуется постоянной производной полезности полного набора по стоимости любого блага, равной оптимальному множителю Лагранжа μ:

$$\frac{\partial \beta}{p_\alpha \partial b_\alpha} = \frac{\partial \beta}{\partial I} = \mu = const. \qquad (56)$$

Эту величину называют предельной полезностью добавочного дохода.

Формула (56) представляет собой формулировку второго закона Госсена, применимую к рассматриваемой постановке оптимизационной задачи. Согласно этому закону, полезность полного набора β обладает одинаковой для всех благ α чувствительностью к малым изменениям стоимости $p_\alpha db_\alpha$, что согласуется с условиями равновесного и однородного распределения полезностей $\beta_\alpha(b_\alpha)$ (20). В этом случае малое приращение дохода dI равномерно распределяется по всем степеням свободы потребителя — элементам полного набора благ, приводя к однородному повышению полезности всего набора.

Обсудим чувствительность предельной полезности добавочного дохода μ к изменению цены p_α отдельного блага α, считая цены остальных благ фиксированными. Представляя функцию (56) в виде $\mu = \left(\sum_\alpha 1/\mu_\alpha\right)^{-1}$ и вычисляя производную $\frac{\partial\mu}{\partial p_\alpha}$ при неизменном доходе I, с учетом (48) будем иметь

$$\left(\frac{\partial\mu}{\partial p_\alpha}\right)_I = \frac{\partial\mu}{\partial\mu_\alpha}\frac{\partial\mu_\alpha}{\partial p_\alpha} = -\frac{1}{\beta'_\alpha\left(\sum_{\alpha'} p_{\alpha'}/\beta'_{\alpha'}\right)^2} < 0. \quad (57)$$

Формула (57) показывает, что с ростом цены ра функция $\mu = \frac{\partial\beta}{p_\alpha \partial b_\alpha}$ убывает, причем скорость убывания снижается с увеличением предельной полезности β'_α этого блага. Полученный результат находится в соответствии с первым законом Госсена. Действительно, при заданном доходе I, при котором $dI = p_\alpha db_\alpha + b_\alpha dp_\alpha = 0$, рост цены p_α сопровождается уменьшением величины b_α, что при фиксированном значении β'_α соответствует снижению полезности b_α, средней полезности β (43) и, в соответствии с (56), предельной полезности денег μ. При этом, чем больше предельная полезность β'_α, тем меньше скорость уменьшения величины μ.

С экономической точки зрения выражение (57) описывает эффект замещения в условиях нормального проявления закона спроса, состоящего в снижении способности индивида использовать деньги на приобретение блага, цена которого претерпела увеличение. При этом, чем большую ценность представляет подорожавший товар, тем меньше желание индивида осуществить замещение его другим товаром.

Чувствительность предельной полезности денег μ (56) к изменению дохода I описывается производной

$$\left(\frac{\partial\mu}{\partial I}\right)_{p_\alpha} = \sum_\alpha \frac{\partial\mu}{\partial\mu_\alpha}\frac{\partial\mu_\alpha}{\partial I} = \mu^2 \sum_\alpha \frac{\beta''_\alpha}{\beta'^2_\alpha} < 0, \quad (58)$$

отрицательный знак которой обязан первому закону Госсена: $\beta''_\alpha = \frac{\partial^2\beta_\alpha}{\partial b_\alpha^2} < 0$. С экономической точки зрения он соответствует понижению предельной полезности денег μ с ростом дохода, который при фиксированных ценах $(dI = \sum_\alpha p_\alpha db_\alpha)$ вызван приращением количества закупаемых благ ($db > 0$), приводящим к насыщению полезности. Как и в предыдущем случае, снижение функции μ замедляется с увеличением крутизны полезности благ, что выражается наличием величины β'^2_α в знаменателе (58).

Обратимся к обсуждению зависимости функции спроса (54) от вектора $\vec{p}$, для чего представим ее в виде

$$b_\alpha\left(\vec{p}, I, \vec{\beta}'\right) = \frac{I}{\left(\sqrt{\frac{p_\alpha}{\beta'_\alpha}}p_\alpha + G_\alpha\right)}\sqrt{\frac{p_\alpha}{\beta'_\alpha}}, \quad (59)$$

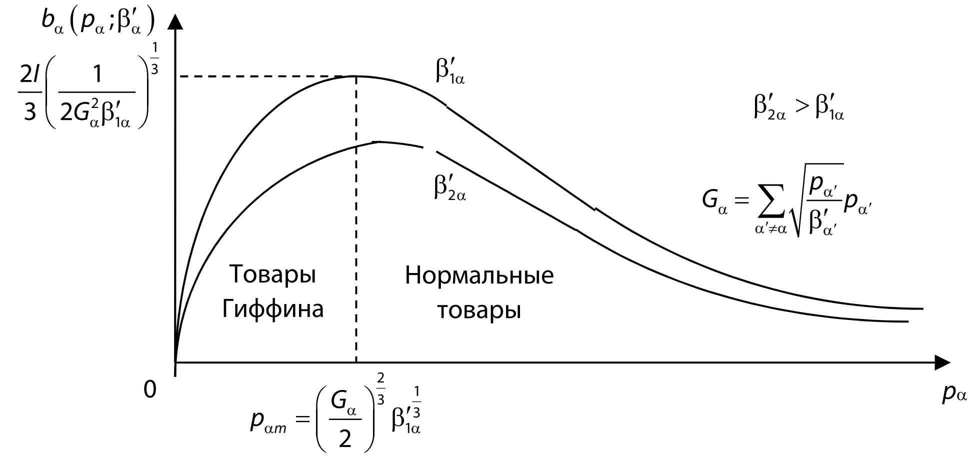

Рис. 3. *Зависимость величины спроса b_α от цены товара p_α при различных значениях предельной полезности β'_α*

где величина

$$G_\alpha = \sum_{\alpha' \neq \alpha} \sqrt{\frac{p_{\alpha'}}{\beta'_{\alpha'}}} p_{\alpha'} \qquad (60)$$

описывает влияние цен $p_{\alpha'}$ и параметров качества $\beta'_{\alpha'}$ благ $\alpha' \neq \alpha$ на спрос товара α; $\vec{\beta}' = (\beta'_\alpha)$ — вектор предельных полезностей благ.

На рис. 3 изображены кривые потребительского спроса (59) как функции цены p_α при различных значениях предельной полезности товара β'_α и фиксированных параметрах I и G_α.

При малых ценах ($p_\alpha \sqrt{\frac{p_\alpha}{\beta'_\alpha}} \ll G_\alpha$) кривые спроса испытывают корневой рост

$$b_\alpha\left(p_\alpha, \beta'_\alpha\right) \approx \frac{I}{G_\alpha} \sqrt{\frac{p_\alpha}{\beta'_\alpha}}, \qquad (61)$$

скорость которого $\approx \frac{I}{2G_\alpha} \frac{1}{\sqrt{p_\alpha \beta'_\alpha}}$ увеличивается с уменьшением предельной полезности — параметра качества товара β'_α.

В точке $p_{\alpha m} = \left(\frac{G_\alpha}{2}\right)^{\frac{2}{3}} \beta'^{\frac{1}{3}}_\alpha$ кривые спроса $b_\alpha(p_\alpha, \beta'_\alpha)$ достигают максимума $b_{\alpha m}$, равного

$$b_{\alpha m} = \frac{2I}{3} \left(\frac{1}{2G_\alpha^2 \beta'_\alpha}\right)^{\frac{1}{3}}. \qquad (62)$$

Дальнейший ход кривой (при $p_\alpha > p_{\alpha m}$) соответствует падению спроса b_α с ростом цены p_α по закону

$$b_\alpha(p_\alpha, \beta'_\alpha) \cong \frac{I}{p_\alpha}\left(1 - \frac{G_\alpha}{p_\alpha}\sqrt{\frac{\beta'_\alpha}{p_\alpha}}\right) \approx \frac{I}{p_\alpha}, \qquad (63)$$

слабо зависящему от предельной полезности β'_α.

Мы видим, что закон оптимального спроса (59) выделяет два класса потребительских товаров. К первому классу относятся товары Гиффена, реализуемые по малым ценам ($p_\alpha > p_{\alpha m}$) с аномальным законом спроса ($\frac{\partial b_\alpha}{\partial p_\alpha} > 0$) с корневой асимптотикой (61). Такие товары являются малоценными, поскольку спрос на них растет с уменьшением параметра качества β'_α.

При больших ценах ($p_\alpha > p_{\alpha m}$) приобретаются блага, принадлежащие классу нормальных товаров, величина спроса b_α на которые уменьшается с ростом цены ($\frac{\partial b_\alpha}{\partial p_\alpha} < 0$) в соответствии с гиперболической асимптотикой (63), практически не зависящей от параметра качества β'_α.

Найдем производную $\left(\frac{\partial b_\alpha}{\partial p_{\alpha'}}\right)_I$, характеризующую отклик (чувствительность) величины рыночного спроса b_α, вызванный приращением цены $p_{\alpha'}$ блага α' при фиксированном доходе I:

$$\left(\frac{\partial b_\alpha}{\partial p_{\alpha'}}\right)_I = \frac{I}{2\left(\vec{p}, \vec{\gamma}\right)^2}\left[\frac{\left(\vec{p}, \vec{\gamma}\right)}{p_\alpha} \gamma_\alpha \delta_{\alpha\alpha'} - 3\gamma_\alpha \gamma_{\alpha'}\right]. \qquad (64)$$

Величины (64) образуют матрицу, диагональные элементы которой

$$\left(\frac{\partial b_\alpha}{\partial p_\alpha}\right)_I = \frac{I}{2\left(p_\alpha \sqrt{\frac{p_\alpha}{\beta'_\alpha}} + G_\alpha\right)^2} \frac{p_\alpha}{\beta'_\alpha}\left(\frac{G_\alpha}{p_\alpha}\sqrt{\frac{\beta'_\alpha}{p_\alpha}} - 2\right) \qquad (65)$$

иллюстрируют рассмотренное выше поведение кривых спроса (см. рис. 3). Недиагональные элементы

$$\left(\frac{\partial b_\alpha}{\partial p_{\alpha'}}\right)_I = -\frac{3}{2} \frac{I}{\left(p_\alpha \sqrt{\frac{p_\alpha}{\beta'_\alpha}} + p_{\alpha'} \sqrt{\frac{p_{\alpha'}}{\beta'_{\alpha'}}} + G_{\alpha\alpha'}\right)^2} \times \sqrt{\frac{p_\alpha}{\beta'_\alpha}} \sqrt{\frac{p_{\alpha'}}{\beta'_{\alpha'}}}$$

$$\alpha \neq \alpha' \qquad (66)$$

показывают, что любое приращение цены $p_{\alpha'}$ товара $b_{\alpha'}$ приводит к снижению величины спроса b_α ($\alpha \neq \alpha'$). Это так называемый эффект отрицательной перекрестной эластичности спроса [9]; здесь $G_{\alpha\alpha'} = \sum_{\alpha'' \neq \alpha, \alpha'} \sqrt{\frac{p_{\alpha''}}{\beta'_{\alpha''}}} p_{\alpha''}$.

Природу этого эффекта легко понять из анализа условия бюджетной достаточности (47), которое в данном случае удобно записать в виде

$$dI = p_{\alpha'} db_{\alpha'} + b_{\alpha'} dp_{\alpha'} + p_\alpha db_\alpha = 0. \qquad (67)$$

Предположим, что α' — товар Гиффена ($p_{\alpha'} \sqrt{\frac{p_{\alpha'}}{\beta'_{\alpha'}}} \ll G_{\alpha\alpha'}$). Тогда, согласно (61), с ростом $p_{\alpha'}$ ($dp_{\alpha'} > 0$) спрос $b_{\alpha'}$ возрастает ($db_{\alpha'} > 0$), что в соответствии с (67) приводит к снижению спроса b_α ($db_\alpha > 0$). Если при этом α — тоже товар Гиффена ($p_\alpha \sqrt{\frac{p_\alpha}{\beta'_\alpha}} \approx p_{\alpha'} \sqrt{\frac{p_{\alpha'}}{\beta'_{\alpha'}}} \ll G_{\alpha\alpha'}$), то эффект перекрестной эластичности спроса (66) имеет корневую асимптотику:

$$\left(\frac{\partial b_\alpha}{\partial p_{\alpha'}}\right)_I \approx -\frac{I}{\left(G_{\alpha\alpha'}\right)^2} \sqrt{\frac{p_\alpha}{\beta'_\alpha}} \sqrt{\frac{p_{\alpha'}}{\beta'_{\alpha'}}}. \qquad (68)$$

Если же α — нормальный товар $\left(p_\alpha\sqrt{\frac{p_\alpha}{\beta'_\alpha}} \gg G_{\alpha\alpha'}\right)$, то

$$\left(\frac{\partial b_\alpha}{\partial p_{\alpha'}}\right)_I = -\frac{I}{p_\alpha^2}\sqrt{\frac{\beta'_\alpha}{\beta'_{\alpha'}}}\sqrt{\frac{p_{\alpha'}}{p_\alpha}}. \tag{69}$$

Пусть теперь благо α' относится к классу нормальных товаров $\left(p_{\alpha'}\sqrt{\frac{p_{\alpha'}}{\beta'_{\alpha'}}} \gg G_{\alpha\alpha'}\right)$, так что при $dp_{\alpha'} > 0$ имеем уже $db_{\alpha'} < 0$. В этом случае знак дифференциала db_α определится знаком суммы первых двух слагаемых в (67). Нетрудно убедиться, на основании (59), что

$$p_{\alpha'}db_{\alpha'} + b_{\alpha'}dp_{\alpha'} = \frac{I\gamma_{\alpha'}}{\left(\vec{p},\vec{\gamma}\right)^2}dp_{\alpha'}\left[\left(\vec{p},\vec{\gamma}\right) - p_{\alpha'}\gamma_{\alpha'}\right] > 0; \tag{70}$$

откуда получаем, что $db_\alpha > 0$. При этом асимптотики закона перекрестного спроса (66) запишутся в виде

$$\left(\frac{\partial b_\alpha}{\partial p_{\alpha'}}\right)_I \approx -\frac{I}{p_{\alpha'}^2}\sqrt{\frac{p_\alpha}{p_{\alpha'}}}\sqrt{\frac{\beta'_{\alpha'}}{\beta'_\alpha}} \tag{71}$$

для малоценных товаров α и

$$\left(\frac{\partial b_\alpha}{\partial p_{\alpha'}}\right)_I \approx -\frac{I}{\left(p_\alpha\sqrt{\frac{p_\alpha}{\beta'_\alpha}} + p_{\alpha'}\sqrt{\frac{p_{\alpha'}}{\beta'_{\alpha'}}}\right)^2}\sqrt{\frac{p_\alpha}{\beta'_\alpha}}\sqrt{\frac{p_{\alpha'}}{\beta'_{\alpha'}}} \tag{72}$$

для нормальных товаров α.

Рассмотрим теперь задачу о влиянии на спрос компенсированного изменения цены, при котором доход меняется таким образом, чтобы полезность β оставалась неизменной. Решение такой задачи сводится к анализу частных производных $\left(\frac{\partial b_\alpha}{\partial p_{\alpha'}}\right)_\beta$, которые можно найти, используя метод функциональных определителей Якоби (см. [12, с. 441]):

$$\left(\frac{\partial b_\alpha}{\partial p_{\alpha'}}\right)_\beta = \frac{\partial\left(b_\alpha,\beta\right)}{\partial\left(p_{\alpha'},\beta\right)} = \frac{\partial\left(b_\alpha,\beta\right)}{\partial\left(p_{\alpha'},I\right)}\frac{\partial\left(p_{\alpha'},I\right)}{\partial\left(p_{\alpha'},\beta\right)} =$$

$$= \left(\frac{\partial b_\alpha}{\partial p_{\alpha'}}\right)_I - \left(\frac{\partial \beta}{\partial p_{\alpha'}}\right)_I\left(\frac{\partial b_\alpha}{\partial I}\right)_{p_{\alpha'}}\left(\frac{\partial I}{\partial \beta}\right)_{p_{\alpha'}}. \tag{73}$$

Поскольку $\beta = \beta[b_{\alpha''}(p_{\alpha'}, I)]$, то, в соответствии с (46), (47),

$$\left(\frac{\partial \beta}{\partial p_{\alpha'}}\right)_I = \sum_{\alpha''}\frac{\partial\beta}{\partial b_{\alpha''}}\left(\frac{\partial b_{\alpha''}}{\partial p_{\alpha'}}\right)_I = \sum_{\alpha''}\beta'_{\alpha''}\frac{\gamma_{\alpha''}^2}{\vec{\gamma}^2}\left(\frac{\partial b_{\alpha''}}{\partial p_{\alpha'}}\right)_I.$$

Поэтому

$$\left(\frac{\partial b_\alpha}{\partial p_{\alpha'}}\right)_\beta = \left(\frac{\partial b_\alpha}{\partial p_{\alpha'}}\right)_I - \sum_{\alpha''}p_{\alpha''}\left(\frac{\partial b_{\alpha''}}{\partial p_{\alpha'}}\right)_I\left(\frac{\partial b_\alpha}{\partial I}\right)_{p_{\alpha'}}. \tag{74}$$

Подставляя в (74) выражение для $\left(\frac{\partial b_{\alpha''}}{\partial p_{\alpha'}}\right)_I$ из (64), после элементарного суммирования получаем соотношение

$$\left(\frac{\partial b_\alpha}{\partial p_{\alpha'}}\right)_\beta = \left(\frac{\partial b_\alpha}{\partial p_{\alpha'}}\right)_I + b_{\alpha'}\left(\frac{\partial b_\alpha}{\partial I}\right)_{p_{\alpha'}} =$$

$$= \left(\frac{\partial b_\alpha}{\partial p_{\alpha'}}\right)_I + \frac{b_\alpha b_{\alpha'}}{I}, \tag{75}$$

по форме совпадающее с уравнением Слуцкого [6].

Следует обратить внимание на то, что, в отличие от модельного подхода к теории потребления [6], где анализ уравнения Слуцкого лежит в основании классификации потребительских товаров по знаку чувствительностей общего (рыночного) и компенсированного (равновесного) спроса, в рамках вероятностно-динамического метода роль такого классификатора выполняют функции (59) $b_\alpha(p_\alpha, I;\ \beta'_\alpha)$ (рис. 3), благодаря выделению в области их определения соответствующих участков по цене p_α и предельной полезности β'_α. В этом случае анализ равенств (75) направлен, главным образом, на установление соотношений между рыночным и компенсированным спросом.

Согласно (75), отклик равновесного спроса, полученный для модифицированной функции полезности (13), всегда превышает отклик рыночного спроса. Это связано с тем, что при пренебрежении эффектом дохода повышение цены на товар приводит к такому изменению рыночного спроса, при котором сохранение прежнего уровня полезности набора благ обеспечивается компенсирующим изменением дохода, вызывающем рост величины равновесного спроса. Для случая перекрестной ценовой эластичности спроса и класса нормальных товаров это положение очевидно. Доказательство его для класса малоценных товаров исходит из того факта, что постоянство дохода в этом случае обеспечивается уменьшением спроса на товар $\alpha' \neq \alpha$ большей ценности. Следствием этого является понижение уровня полезности полного набора, восстановление которого достигается компенсирующим повышением спроса на товар α.

Учитывая формулы (54) и (64), из выражения (75) получаем явный вид функции отклика равновесного спроса, симметричный по индексам α и α':

$$\left(\frac{\partial b_\alpha}{\partial p_{\alpha'}}\right)_\beta = \frac{I}{2\left(\vec{p},\vec{\gamma}\right)^2}\left[\left(\frac{G_\alpha}{p_\alpha\gamma_\alpha}+1\right)\gamma_\alpha^2\delta_{\alpha\alpha'} - \gamma_\alpha\gamma_{\alpha'}\right]. \quad (76)$$

Из выражения (76) вытекает известное соотношение [6]

$$\sum_{\alpha'}\left(\frac{\partial b_\alpha}{\partial p_{\alpha'}}\right)_\beta p_{\alpha'} = 0, \quad (77)$$

приводящее к равенству нулю суммы эластичностей рыночного спроса по цене и доходу:

$$\sum_{\alpha'}\frac{p_{\alpha'}}{b_\alpha}\left(\frac{\partial b_\alpha}{\partial p_{\alpha'}}\right)_I + \frac{I}{b_\alpha}\left(\frac{\partial b_\alpha}{\partial I}\right)_{p_{\alpha'}} = 0. \quad (78)$$

Отметим, в заключение, что поскольку правая часть равенства (75) удовлетворяет условиям оптимизационной задачи (41–44), отклики компенсированного и рыночного спроса должны рассматриваться с позиции единого критерия оптимальности (46), эквивалентного условию равновесного поведения потребителя (20) (см. [2], с. 64).

Выводы

1. В рамках вероятностно-динамического метода рассмотрены вопросы равновесного поведения индивидуального потребителя. Введена функция полезности полного набора благ $\beta(b_\alpha)$ в виде математического ожидания полезностей элементов полного набора β_α, распределенных с геометрическими вероятностями b_α^2 / b^2. Найдена асимптотика функции полезности β_α в области насыщения потребления, установлена ее размерность.

2. Введено представление об устойчиво равновесном потреблении, характеризующимся однородным распределением полезностей благ, равных по величине полезности полного набора.

3. Поставлена и решена задача оптимизации потребительского спроса, обеспечивающего максимум функции полезности потребителя при заданном объеме благ. Получена формулировка второго закона Госсена и изучена чувствительность оптимального спроса к изменению предельных полезностей отдельных благ набора и его полного объема b_0. Показано, что в оптимальном наборе благ увеличение количества высококачественных благ $\{b_\alpha\}$ должно быть сопряжено с ростом качества малоценных продуктов $\{b_{\alpha'}\}$.

4. Решена оптимизационная задача потребительского поведения в традиционной (неоклассической) постановке. В условиях равновесного (однородного) распределения полезностей благ получено аналитическое выражение для оптимальной функции спроса. Сформулирован второй закон Госсена, свидетельствующий о постоянстве предельной полезности добавочного дохода (предельной полезности денег).

5. Описано явление снижения предельной полезности денег с ростом дохода (при постоянных ценах) или ростом цен (при постоянном доходе), причем скорость снижения убывает с увеличением предельной полезности блага и его цены. Показано, что природа этого явления может быть объяснена с привлечением первого закона Госсена.

6. Изучена зависимость функции оптимального спроса b_α от цены блага p_α при различных значениях предельной полезности β'_α. Определены области поведения этой функции, отвечающие нормальным потребительским товарам, для которых величина спроса b_α уменьшается с ростом цены p_α (при $p_\alpha > p_{\alpha m}$), и товарам Гиффена, реализуемым по ценам $p_\alpha < p_{\alpha m}$ с аномальным законом спроса ($\frac{\partial b_\alpha}{\partial p_\alpha} > 0$). Отмечено, что товары Гиффена относятся к типу малоценных, поскольку соответствующая им величина спроса растет с уменьшением предельной полезности товара.

7. Исследованы функции отклика перекрестного потребительского спроса при постоянном доходе потребителя. Показано, что любое приращение цены $p_{\alpha'}$ приводит к снижению величины спроса b_α ($\alpha \neq \alpha'$) — так называемый эффект отрицательной перекрестной эластичности спроса b_α. Описана природа этого эффекта и найдены его асимптотики для различных классов товаров.

8. Рассмотрен отклик компенсированного спроса на приращение цены товара при постоянной полезности набора благ и установлена связь его с откликом рыночного спроса (при постоянном доходе), описываемая соотношением (75), аналогичным уравнению Слуцкого. Отмечено, что в отличие от модельного подхода к теории потребления [6], где уравнения Слуцкого классифицируют потребительские товары по знаку чувствительностей рыночного и компенсированного спроса, в рамках вероятностно-динамического метода роль такого классификатора, как указано выше, выполняют функции (59) $b_\alpha(p_\alpha, I; \beta'_\alpha)$ (рис. 3), благодаря выделению в области их определения соответствующих участков по цене p_α и предельной полезности β'_α.

Список источников

1. *Блауг М.* Госсен Герман Генрих. — СПб.: Экономикус, 2008. — С. 88–90.
2. *Гребенников П. И., Леусский А. И., Тарасевич Л. С.* Микроэкономика: учебник; общ. ред. Л. С. Тарасевича. — СПб.: Изд. СПбУЭФ, 1998. — 447 с.
3. *Джевонс У. С.* Деньги и механизмы обмена. — М.: Социум, 2008. — 180 с.
4. *Иванов А. Г., Кукушкин (Славин) В. А.* Динамика потребительского поведения субъекта // Вестник ННГУ. — 2010. — № 6. — С. 155 — 163.
5. *Иванов А. Г., Кукушкин (Славин) В.* А. О вероятностно-динамическом методе в задачах микроэкономики // Вестник ННГУ. –2010. — № 1. — С. 179 — 189.
6. *Интрилигатор М.* Математические методы оптимизации и экономическая теория. — М.: Айрис-Пресс, 2002. — 576 с.
7. *Маршалл А.* Принципы экономической теории. — М.: Прогресс, 1993.
8. *Менгер К.* Избранные работы. — М.: Издательский дом «Территория будущего», 2005. — 496 с.
9. *Самуэльсон Пол А.* Основания экономического анализа: пер. с англ. под ред. П. А. Ватника. — СПб.: Экономическая школа, 2002. — 604 с.
10. *Смит А.* Исследование о природе и причинах богатства народов // Антология экономической классики: в 2-х т. — М.: Эконом, 1993.
11. *Фон Нейман Дж., Моргенштерн О.* Теория игр и экономическое поведение. — М.: Наука, 1970. — 708 с.
12. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. — Т. I. — М.: Наука, 1970. — 608 с.
13. *Хикс Д. Р.* Стоимость и капитал. — М.: Издательская группа «Прогресс», 1993.