

# МОДЕЛИРОВАНИЕ ОЖИДАНИЙ В СИСТЕМАХ С ГЕТЕРОГЕННЫМИ АГЕНТАМИ

**Л. А. Серков**

*Рассматривается влияние эндогенной нормы временных предпочтений на динамику стохастических моделей с гетерогенными агентами с использованием алгоритма формирования ожиданий, ассоциируемого с обучением агентов методом проб и ошибок. Показано, что в моделях с эндогенной нормой временных предпочтений скорость схождения этого алгоритма значительно превышает скорость схождения алгоритма в моделях с постоянной нормой временных предпочтений. Кроме того, наличие обратной связи для нормы временных предпочтений приводит к снижению волатильности исследуемых переменных.*

В предыдущей публикации автора [3] сформулирована идея о том, что формирование ожиданий на основе адаптивного обучения при ограниченной информации является одним из механизмов самоорганизации ожиданий экономических агентов на микроэкономическом уровне. Саморазвитие этого процесса определяет эволюцию экономической системы на макроэкономическом уровне [2, 4]. Все результаты, полученные в работе [3], относятся к формированию ожиданий репрезентативными агентами, то есть субъектами рынка, поведение которых отражает в среднем поведение индивидуальных агентов, выполняющих на рынке одинаковую функцию. Данный принцип является одним из недостатков динамических стохастических моделей общего равновесия (*DSGE*-моделей), в которых он используется, так как представляет собой, по сути, методологический редукционизм, сводящий сложные экономические системы к отдельным элементам. Поэтому интересно рассмотреть процесс формирования ожиданий на примере моделей с гетерогенными агентами. В данной публикации показано, что формирование (самоорганизация) ожиданий в подобных моделях может ассоциироваться с обучением индивидуальных агентов методом проб и ошибок.

Исследование *DSGE*-моделей с гетерогенными агентами вызывает затруднения в связи с тем, что кроме идиосинкратических шоков (несистемные шоки, связанные с различием в индивидуальных доходах экономических агентов) агенты испытывают системные агрегированные шоки (например, технологические). Наличие агрегированных неопределенностей приводит к зависящей от времени функции распределения доходов индивидуальных агентов, то есть к переменным состояниям бесконечной размерности. Для анализа подобных моделей необходима соответствующая аппроксимация функции распределения, приводящая к принятию решений экономическими агентами в условиях ограниченной информации.

Следует отметить, что исследованию моделей с гетерогенными агентами при наличии агрегированной неопределенности посвящен ряд работ [5, 7, 12, 13, 14, 15, 17]. Особенностью всех работ является предположение о постоянстве нормы временных предпочтений (нормы дисконтирования) для всех индивидуальных экономических агентов, сглаживающих свое потребление. Данное предположение, по мнению автора, является необоснованным для агентов с различными индивидуальными до-

ходами<sup>1</sup>. Поэтому целью предлагаемой публикации является исследование формирования ожиданий в стохастических моделях с гетерогенными агентами и анализ влияния эндогенной нормы временных предпочтений на сходимость алгоритма ожиданий.

В публикации исследуется динамическая стохастическая модель общего равновесия с агрегированным шоком производительности, подобная моделям, описываемым в упомянутых выше работах. Она описывает экономику с неполными рынками, агрегированной неопределенностью и с бесконечным числом экономических гетерогенных агентов (домашних хозяйств). Источником гетерогенности являются идиосинкратические, частично не страхуемые шоки доходов агентов. Агенты могут частично страховать сами себя против рисков уменьшения доходов, создавая определенные запасы капитала.

В описываемой модели с эндогенной нормой временных предпочтений индивидуальные агенты являются составной частью континуального множества единичной массы (агенту присваивается индекс  $i \in [0, 1]$ ). В каждом периоде времени  $t$  агенты решают задачу максимизации ожидаемой дисконтированной суммы значений функции полезности  $U(c_{it}, h_{it})$ .

$$\max_{\{c_{it}, k_{i,t+1}, h_{it}, \theta_{it}\}} E_t \sum_{t=0}^{\infty} \theta_{it} U(c_{it}, h_{it}), \quad (1)$$

$$\theta_{i,t+1} = \beta_{it}(c_{it}, h_{it})\theta_{it}, \quad \theta_{i0} = 1, \quad t \geq 0. \quad (2)$$

Бюджетное ограничение этой задачи для индивидуальных агентов записывается в виде

$$c_{it} + k_{i,t+1} = r(K_t, h_t, z_t)k_{it} + w(K_t, h_t, z_t)(1 + e_{1,i,t})h_{it} + (1 - \delta)k_{it}, \quad (3)$$

$$k_{i,t+1} \geq 0, \quad (4)$$

где  $E_t$  — оператор ожиданий,  $c_{it}$  — индивидуальный уровень потребления агента,  $k_{it}$  — запас капитала агента на начало периода,  $h_{it}$  — затраченное на труд количество часов каждым агентом. Для упрощения будем считать в дальнейшем время, затраченное на труд, одинаковым для всех агентов. Кроме того, уровень занятости будем считать равным единице (100 %). Фактор субъективных предпочтений  $\theta_{it}$  изменяется в соответствии с уравнением (2), где эндогенная норма временных предпочтений  $\beta(c, h)$  (индексы  $i, t$  опущены) удовлетворяет

<sup>1</sup> Постоянство нормы временных предпочтений допустимо использовать при нейтральности потребителей к риску, то есть при линейной функции полезности.

соотношениям  $\beta_c < 0$ ,  $\beta_h > 0$  ( $\beta_c, \beta_h$  — производные функции  $\beta(c, h)$  по переменным  $c, h$ )<sup>1</sup>. Норма прибыли от капиталовложений  $r(K_t, h_t, z_t)$  и заработная плата индивидуального агента  $w(K_t, h_t, z_t)$  являются функциями от агрегированных значений капитала  $K_t$  (на одного агента), затрат времени на труд  $h_t$  (как отмечалось выше,  $h_t = h_{it}$ ) и агрегированного технологического шока  $z_t$ . Различие в трудовых доходах агентов обеспечивается наличием идиосинкратических шоков  $e_{1,it} \sim N(0, \sigma_1^2)$ . Параметр  $\delta$  в бюджетном ограничении (3) является нормой обесценения капитала.

Фирмы действуют в интересах собственников — агентов на конкурентных рынках. Технология фирм описывается производственной функцией Кобба — Дугласа  $Y_t = z_t K_t^\alpha h_t^{1-\alpha}$ , где  $\alpha$  и  $1-\alpha$  — доли факторов производства в общем объеме выпуска. При этом арендная стоимость капитала для фирм (норма прибыли от капиталовложений для агентов)  $r(K_t, h_t, z_t) = \alpha z_t (K_t / h_t)^{\alpha-1}$ , и стоимость труда  $w(K_t, h_t, z_t) = (1-\alpha) z_t (K_t / h_t)^\alpha$ . Агрегированный технологический шок  $z_t$  является экзогенным стохастическим процессом и изменяется в соответствии с авторегрессионным уравнением

$$z_t = (1-\rho) + \rho z_{t-1} + e_{2,t}, \quad (5)$$

где  $\rho$  — коэффициент сглаживания,  $0 < \rho < 1$ ,  $e_{2,t} \sim N(0, \sigma_2^2)$ .

Как уже отмечалось выше, для решения задачи оптимизации (1)–(4) необходима соответствующая аппроксимация функции распределения доходов (запасов капитала) индивидуальных агентов. В предлагаемой публикации используется подход, предложенный Krusell and Smith [14, 15], заключающийся в замене динамики функции распределения доходов динамикой моментов этой функции. Отметим, что этот подход ассоциируется с алгоритмом формирования ожиданий путем обучения агентов методом проб и ошибок (более подробно алгоритм Крусела — Смита рассматривается ниже). В общем случае функция распределения характеризуется статистикой моментов  $m = (m_1, m_2, \dots, m_I)$ , где  $I$  — порядок момента. Крусел и Смит [14] показали, что игнорирование моментов порядка выше первого приводит к экстремально малой ошибке. Поэтому рассмотрим простейший случай аппроксимации динамики функции распределения запасов капитала индивидуальных агентов динамикой ее первого момента, то есть

агрегированного капитала  $K_t$ . Таким образом, для решения задачи оптимизации к условиям (1)–(4) необходимо добавить воспринимаемый агентами закон изменения агрегированного капитала  $K_t = f(K_{t-1}, z_t)$ . Если при адаптивном обучении для формирования ожиданий репрезентативные агенты прогнозировали значения впередсмотрящих переменных [3], то в исследуемой модели с гетерогенными агентами последние делают предположение о законе движения агрегированной переменной (капитала). Так как этот закон движения одинаков для всех индивидуальных агентов, то агенты считаются *ex post* гетерогенными и *ex ante* идентичными (репрезентативными).

Так же, как и при адаптивном обучении [3, 8, 9, 10, 21], для воспринимаемого агентами закона изменения агрегированного капитала в подходе Крусела и Смита используются сокращенные формы линейных функций. Для решения задачи оптимизации будем использовать воспринимаемый закон изменения агрегированного капитала в виде [7]

$$K_t = b_0 + b_K K_{t-1} + b_z (z_t - z), \quad (6)$$

где  $z$  — стационарное (долгосрочное) детерминированное состояние технологического шока  $z_t$ , параметры  $b_0, b_K, b_z$  характеризуют убеждения агентов относительно закона изменения агрегированного капитала и могут изменяться при обучении методом проб и ошибок.

Рассмотрим пошагово алгоритм Крусела — Смита [14] применительно к исследуемой модели.

1. Задаем начальный вектор параметров убеждений агентов  $b$  из компонент  $b_0, b_K, b_z$ . Генерируем временную последовательность агрегированного шока  $z_t$  длиной  $T$ . Задаем начальные значения запасов капитала  $k_{it}$  для  $N$  индивидуальных агентов. Генерируем для каждого агента временную последовательность идиосинкратического шока длиной  $T$ .

2. Для заданного вектора параметров  $b$  и закона изменения агрегированного капитала (6) решаем задачу (1)–(6) для индивидуального агента.

3. Используя полученные на втором шаге поведенческие функции (правила) для индивидуальных агентов, проводим имитационное моделирование с помощью метода Монте-Карло индивидуальных запасов капитала  $k_{it}$  для совокупности  $N$  агентов. Агрегируя на каждом периоде симуляции запасы капитала индивидуальных агентов, получаем временной ряд  $K_t$ .

4. С помощью регрессионного анализа для переменной  $K_t$ , полученной на предыдущем

<sup>1</sup> При постоянной норме временных предпочтений  $\beta(c, h) = \beta$  из уравнения (2) следует, что  $\theta_{it} = \beta_t$ .

Таблица 1

Результаты исследования моделей с гетерогенными агентами

Переменная	Модель с постоянной нормой дисконтирования				Модель с эндогенной нормой дисконтирования			
	Значение переменной в стационарном состоянии	Среднее значение	Станд. откл.	Дисперсия	Значение переменной в стационарном состоянии	Среднее значение	Станд. откл.	Дисперсия
$k$	13,3108	13,341	0,8059	0,6495	5,25588	5,2643	0,2065	0,0426
$K$	13,264	13,264	0,3735	0,1395	8	8,000	0,1748	0,0305
$c$	1,514	1,5173	0,0470	0,0022	1,34554	1,3448	0,0368	0,0014
$r$	0,0347774	0,0347	0,0021	0,0000	0,0357993	0,0358	0,0005	0,0000
$w$	1,44747	1,4498	0,0483	0,0023	1,43356	1,4337	0,0401	0,0016
$h$	0,956054	0,9535	0,0733	0,0054	0,899003	0,8991	0,0128	0,0002

шаге, находим вектор регрессионных параметров  $\tilde{b}$ , компонентами которого являются параметры  $\tilde{b}_0, \tilde{b}_K, \tilde{b}_z$ .

5. Задаем вектор параметров  $\tilde{b}_{new}$  для следующей возможной итерации по правилу  $\tilde{b}_{new} = \lambda \tilde{b} + (1 - \lambda) \tilde{b}$ , где  $\lambda \in [0, 1]$  — параметр обновления.

6. Повторяем шаги со второго по пятый до тех пор, пока норма вектора разности  $\tilde{b}_{new} - b$  не будет превышать заданную величину ошибки.

Таким образом, рассмотренный алгоритм можно ассоциировать с обучением агентов методом проб и ошибок, которое можно считать одним из механизмов формирования ожиданий в моделях с гетерогенными агентами.

Остановимся более подробно на втором шаге. Задача оптимизации (1)–(6) решается в данной работе методами теории возмущений второго порядка [19]. Для абстрагирования от ограничения (5) в виде неравенства следует заменить это ограничение стандартным добавлением в условие максимизации (1) штрафной функции [7] вида

$$P(k_{i,t+1}) = -\exp(-\eta_0 k_{i,t+1}) - \eta_2 k_{i,t+1},$$

где  $\eta_0, \eta_1, \eta_2$  — параметры штрафной функции. Условие максимизации (1) в этом случае примет вид

$$\max_{\{c_{it}, k_{i,t+1}, h_{it}, \theta_{it}\}} E_t \sum_{t=0}^{\infty} \theta_{it} U(c_{it}, h_{it}) + P(k_{i,t+1}),$$

Реализация алгоритма Круселя — Смита временных предпочтений осуществлялась в п/п Matlab<sup>1</sup>. Функция полезности  $U(c_{it}, h_{it}) \equiv c_{it}^{1-\sigma} / (1-\sigma) - h_{it}^{1+\phi} / (1+\phi)$ , где  $\sigma$  — па-

<sup>1</sup> Ввиду специфического формата публикации промежуточные выкладки результатов решения задачи оптимизации методами теории возмущений опущены и могут быть представлены автором вместе с программными кодами при запросе по электронной почте.

раметр, обратный эластичности межвременного замещения,  $\phi$  — параметр, обратный эластичности предложения труда. Примем, что  $\sigma = 1$  и  $\phi = 4^2$ . Явный вид функции  $\beta(c_{it}, h_{it})$  примем аналогичным предложенным в работе [20]:  $\beta(c_{it}, h_{it}) = (1 + c_{it} - \omega^{-1} h_{it}^{\omega})^{-\psi}$ , где параметры  $\omega = 1,455, \psi = 0,11$ . Параметры штрафной функции  $\eta_0 = 0,4, \eta_1 = 0,3, \eta_2 = 0,4$  (выбраны из условий устойчивости и максимальной скорости схождения алгоритма). Другие значения параметров:  $\alpha = 0,25, \delta = 0,025, \rho = 0,95, \lambda = 0,5$ . Начальные значения параметров убеждений обучающихся агентов:  $b_0 = 1,4, b_K = 0,6, b_z = 0,95$  (выбраны из условий максимальной скорости схождения алгоритма). Число гетерогенных агентов, участвующих в накоплении капитала  $N = 1000$ , длина временного ряда  $T = 10000$ . Начальные значения запасов капитала для всех индивидуальных агентов равны запасам капитала в стационарном детерминированном (долгосрочном) состоянии.

Результаты реализации алгоритма Круселя — Смита для модели с гетерогенными агентами и эндогенной нормой временных предпочтений сравнивались с аналогичными результатами для подобной модели с постоянной (экзогенной) нормой временных предпочтений. В таблицах 1 и 2 приведены результаты исследования моделей для ошибки схождения алгоритма, равной 0.0001.

При анализе таблицы 1 следует обратить внимание прежде всего на гораздо меньшую волатильность (определяемую дисперсией) всех переменных в модели с эндогенной нормой временных предпочтений. В частности, меньшая волатильность потребления означает, что индивидуальные агенты более эффективно сглаживают свое потребление в мо-

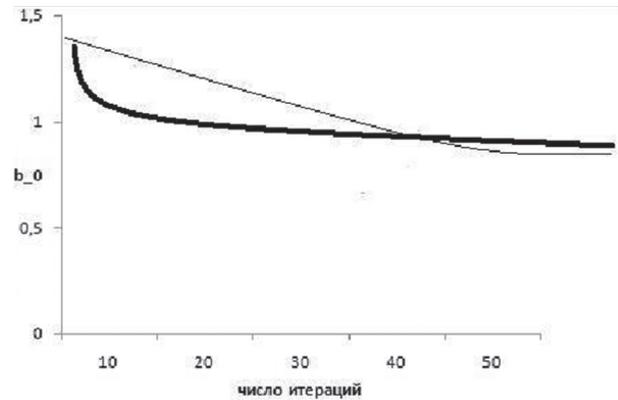
<sup>2</sup> Эти значения параметров наиболее часто используются при калибровке DSGE моделей [6, 11, 16, 18].

Таблица 2  
Декомпозиция дисперсий в моделях с гетерогенными агентами

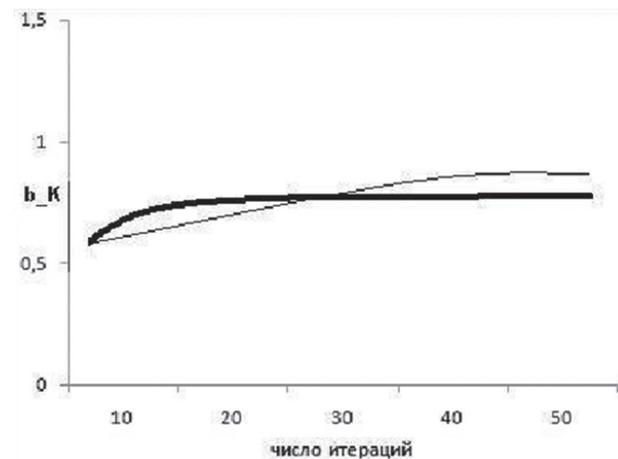
Переменная	Модель с постоянной нормой дисконтирования		Модель с эндогенной нормой дисконтирования	
	$e_1$	$e_2$	$e_1$	$e_2$
$k$	80,19	19,81	91,86	8,14
$K$	0	100	0	100
$c$	35,42	64,58	60,66	39,34
$r$	89,93	10,07	37,26	62,74
$w$	32,79	67,21	0,87	99,13
$h$	99,49	0,51	53,78	46,22
$z$	0	100	0	100

дели с эндогенной нормой временных предпочтений по сравнению с моделью с постоянной нормой дисконтирования. Следует отметить, что одним из недостатков современных *DSGE*-моделей является, в частности, несоответствие между фактической и получаемой при моделировании волатильностью потребления домашних хозяйств. Значение последней намного превышает фактическую волатильность потребления. Для устранения этого несоответствия в уравнения *DSGE*-моделей вводят не совсем реалистичную предпосылку о формировании у агентов привычек в потреблении (*habit formation*). Агенты стараются поддерживать одинаковый уровень потребления при изменяющемся доходе в силу своих привычек и сглаживают свое потребление. Введение в модель эндогенной нормы временных предпочтений для сглаживания потребления является, по мнению автора, более реалистичной предпосылкой, чем предпосылка о формировании привычек в потреблении. Следствием меньшей волатильности потребления агентов в исследуемой модели являются меньшие средние значения запасов капитала индивидуальных агентов и агрегированного капитала по сравнению с соответствующими значениями в модели с постоянной нормой временных предпочтений.

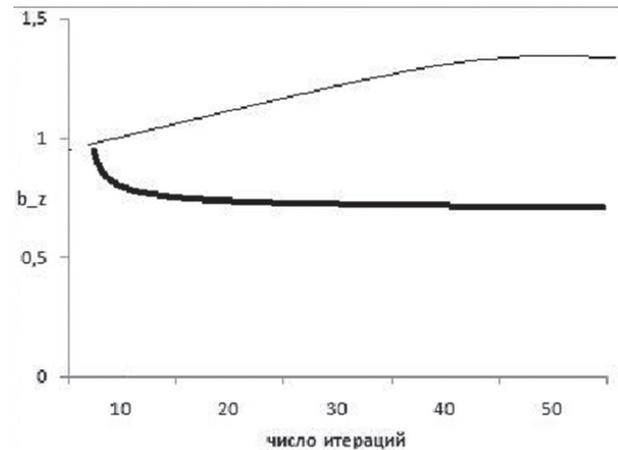
В таблице 2 приведены результаты декомпозиции дисперсии эндогенных переменных, то есть доля дисперсии этих переменных, которая вызывается идиосинкратическим шоком  $e_1$  и агрегированным шоком  $e_2$ . Интересно отметить, что технологический шок оказывает меньшее влияние на индивидуальные запасы капитала и потребление в модели с эндогенной нормой дисконтирования по сравнению с моделью с постоянной нормой временных предпочтений. Гораздо большее влияние на волатильность этих переменных в моделях с эндо-



а



б



в

**Рис.** Зависимость коэффициентов убеждений обучающихся агентов от числа итераций  $b_0$  (а),  $b_K$  (б),  $b_z$  (в) для моделей с эндогенной нормой временных предпочтений (толстая линия) и постоянной нормой временных предпочтений  $\beta = 0,99$  (тонкая линия). Ошибка схождения алгоритма равна 0,0001

генным фактором дисконтирования оказывает идиосинкратический шок, что является более реалистичным результатом. В большей мере данный результат характерен для потребления индивидуальных агентов.

Таблица 3  
Влияние значений параметров функции эндогенной нормы временных предпочтений на скорость схождения коэффициентов убеждений

Модель с эндогенной нормой дисконтирования			Модель с постоянной нормой дисконтирования ( $\beta = 0,99$ )				
$\omega$	$\psi$	Скорость схождения коэфф., $t$			Скорость схождения коэфф., $t$		
		$b_0$	$b_k$	$b_z$	$b_0$	$b_k$	$b_z$
0,09	1,15	25	20	20	50	45	45
0,11	1,45	25	25	25	50	55	45
0,13	1,75	30	30	30	60	65	50
0,15	1,95	35	40	35	65	70	60
0,17	2,15	40	44	38	68	73	63
0,19	2,25	44	48	42	72	77	65

Как отмечалось выше, алгоритм моделирования Круселя — Смита можно ассоциировать с формированием ожиданий на основе обучения индивидуальных агентов методом проб и ошибок. Поэтому интересно сравнить сходимость этого алгоритма для моделей с эндогенной и постоянной нормой временных предпочтений. Результаты сравнения представлены на рисунке.

Из анализа графиков следует, что скорость схождения коэффициентов убеждений обучающихся агентов к целевым значениям для модели с эндогенной нормой временных предпочтений намного превышает аналогичную скорость для модели с постоянной нормой временных предпочтений. Таким образом, наличие обратной связи для нормы временных предпочтений ускоряет формирование ожиданий обучающихся агентов.

Для подтверждения вышесказанного вывода исследовалась скорость схождения коэффициентов убеждений обучающихся агентов к целевым значениям при изменении параметров моделей с эндогенной и постоянной нормой временных предпочтений. Анализ чувствительности показал, что скорость схождения коэффициентов убеждений не зависит от значений параметра  $\phi$  (параметр, обратный эластичности предложения труда), слабо зависит от значений параметра  $\sigma$  (параметр, обратный эластичности межвременного замещения) и дисперсии идиосинкратического шока  $\sigma_1^2$ . При этом, как и в рассмотренном выше примере, скорость схождения коэффициентов убеждений для модели с эндогенной нормой временных предпочтений намного превышает

аналогичную скорость для модели с постоянной нормой временных предпочтений.

Более существенное влияние на скорость схождения коэффициентов убеждений оказывают параметры функции эндогенной нормы временных предпочтений  $\beta(c, h)$ . В таблице 3 приведена зависимость скорости схождения коэффициентов убеждений для двух типов моделей при различных значениях параметров этой функции из области устойчивости решений уравнений модели (наличие единственного равновесного состояния) [1, 4].

Следует отметить, что в таблице 3 скорость схождения коэффициентов убеждений измеряется по значению временного периода, по истечении которого коэффициенты принимают постоянное значение. Кроме того, отметим, что как и в предыдущих случаях, скорость схождения коэффициентов убеждений для модели с эндогенной нормой временных предпочтений превышает аналогичную скорость для модели с постоянной нормой временных предпочтений.

Наибольшее влияние на скорость схождения коэффициентов убеждений в обоих типах моделей оказывает степень агрегированной неопределенности, измеряемая дисперсией технологического шока  $\sigma_2^2$  (табл. 4). Но и в этом случае скорость схождения коэффициентов убеждений для модели с эндогенной нормой временных предпочтений превышает аналогичную скорость для модели с постоянной нормой временных предпочтений.

Таким образом, в соответствии с целями публикации, исследовано влияние эндогенной нормы временных предпочтений на динамику стохастических моделей с гетерогенными агентами. При этом анализе применялся алгоритм формирования ожиданий, ассоциируемый с

Таблица 4  
Влияние значений дисперсии технологического шока  $\sigma_2^2$  на скорость схождения коэффициентов убеждений

$\sigma_2^2$	Модель с эндогенной нормой дисконтирования			Модель с постоянной нормой дисконтирования ( $\beta = 0,99$ )		
	Скорость схождения коэфф., $t$			Скорость схождения коэфф., $t$		
	$b_0$	$b_k$	$b_z$	$b_0$	$b_k$	$b_z$
0,007	25	20	20	50	45	45
0,01	35	45	45	80	85	90
0,03	50	60	60	108	104	110
0,05	70	70	75	148	140	143
0,1	90	85	88	185	175	186

обучением агентов методом проб и ошибок. Показано, что в моделях с эндогенной нормой временных предпочтений скорость схождения этого алгоритма значительно превышает скорость схождения алгоритма в моделях с постоянной нормой временных предпочте-

ний. Кроме того, наличие обратной связи для нормы временных предпочтений приводит к снижению волатильности исследуемых переменных. Полученные результаты могут представлять интерес при анализе крупномасштабных *DSGE*-моделей.

#### Список источников

1. Андреев М. Ю., Поспелов И. Г. Принцип рациональных ожиданий. Обзор концепций и примеры моделей. — М.: ВЦ РАН, 2008. — 79 с.
2. Руденко А. П. Теория саморазвития открытых каталитических систем. — М.: Изд-во МГУ, 1969. — 276 с.
3. Серков Л. А. Самоорганизация ожиданий с ограниченной рациональностью как механизм саморазвития экономических систем. // Экономический анализ. Теория и практика. — 2014. — № 33(384). — С. 49-55.
4. Серков Л. А. Синергетические аспекты моделирования социально-экономических процессов. — Екатеринбург: Институт экономики УрО РАН, 2008. — 215 с.
5. Aiyagari S. Uninsured Idiosyncratic Risk and Aggregate Saving // Quarterly Journal of Economics. — 1994. — No 109. — P. 659-684.
6. Clarida R., Gali J., Gertler M. Monetary Policy Rules and Macroeconomic Stability: Evidence and Some Theory // The Quarterly Journal of Economics. — 2000. — № 115(1). — P. 147-180.
7. Den Haan W.J., Rendaahl P. Solving the Incomplete Markets Model with Aggregate Uncertainty Using Explicit Aggregation // Journal of Economic Dynamics and Control. — 2010. — No 34. — P. 69-78.
8. Evans G. W., Honkapohja S. Learning Dynamics // Handbook of Macroeconomics / ed. by J. B. Taylor, M. Woodford. — Princeton: Princeton University Press, 1999. Vol. 1. Ch. 7.
9. Evans G. W., Honkapohja S. Adaptive Learning and Monetary Policy Design // Journal of Money, Credit and Banking. — 2003. — Vol. 35 — P. 1045-1072.
10. Evans G. and McGough B. Monetary policy, indeterminacy and learning // Journal of Economic Dynamics and Control. — 2005. p. 1809-1840.
11. Galí J., Monacelli T. Monetary Policy and Exchange Rate Volatility in a Small Open Economy // Review of Economic Studies. — 2005. — Vol.72. — No 3.
12. Huggett M. The Risk-Free Rate in Heterogeneous-Agent Incomplete-Insurance Economies // Journal of Economic Dynamics and Control. — 1993. — 17. — P. 953-969.
13. Kim S., Kollmann R., Kim J. Solving the Incomplete Markets Model with Aggregate Uncertainty Using a Perturbation Method // Journal of Economic Dynamics and Control. — 2010. — No 34. — P. 50-58.
14. Krusell P., Smith A. A. Income and Wealth Heterogeneity in the Macroeconomy // Journal of Political Economy. — 1998. — No 106. — P. 867-896.
15. Krusell P., Smith A. A. Income and Wealth Heterogeneity, Portfolio Choice, and Equilibrium Asset Returns // Macroeconomic Dynamics. — 1997. — No 1. — P. 387-422.
16. Kydland F., Prescott E. C. Time to build and aggregate fluctuations. // Econometrica. — 1982. — No 50 (6). — P. 1345-70.
17. Maliar L., Maliar S., Valli F. Solving the Incomplete Markets Model with Aggregate Uncertainty Using the Krusell-Smith Algorithm // Journal of Economic Dynamics and Control. — 2010. — No 34. — P. 42-49.
18. Monacelli T. Into the Mussa Puzzle. Monetary Policy Regimes and the Real Exchange Rate in a Small Open Economy // Journal of International Economics. — 2004. — No 62. — P. 191-217.
19. Schmitt-Grohe S., Uribe M. Solving dynamic general equilibrium models using a second-order approximation to the policy function // Journal of Economic Dynamics and Control. — 2004. — No 28(4). — P. 755-775.
20. Schmitt-Grohe S. Closing Small Open Economy Models. // NBER Working Paper. 2002. — № 9270. — P. 1-19.
21. Slobodyan S., Wouters R. Learning in a Medium-Scale DSGE Model with Expectations Based on Small Forecasting Models // American Economic Journal. Macroeconomics. — 2012. — P. 65-101.

УДК 332.012.2+332.1

**Ключевые слова:** гетерогенные агенты, ожидания, эндогенная норма временных предпочтений, обучение методом проб и ошибок