ЖУРНАЛ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ №4/2014

ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ ОТКРЫТИЯ В МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЭКОНОМИКЕ ОТЕЧЕСТВЕННЫХ УЧЕНЫХ В XX ВЕКЕ

Х. Н. Гизатуллин

В статье излагается процесс возникновения нового направления исследований по экономической теории, возникшее в условиях бурного развития научно-технического прогресса в человеческой деятельности, а также использования его в современных условиях.

Введение

В XX в. совершен ряд открытий на стыке математики и экономики. Два открытия связаны с именами отечественных ученых — В.В. Леонтьева и Л.В. Канторовича. Оба ученых удостоены Нобелевской премии. Первый из них профессиональный экономист, получивший экономическое образование в советской России и впоследствии иммигрировавший в США, второй — профессор математики Санкт-Петербургского университета, специалист по функциональному анализу.

В. Леонтьеву принадлежит разработка и апробация модели межотраслевых взаимодействий. Эта модель использовалась во многих странах, в частности, крупные исследования структуры экономики СССР связаны с использованием этой модели. Открытие было сделано в 30-х гг. XX в. В настоящее время модель В. Леонтьева получила дальнейшее развитие и активно используется во всем мире. Как известно, научные достижения не имеют национальных границ.

Л. Канторович совершил открытие также в 30-х гг. в результате анализа производственных процессов при выработке рекомендаций по эффективному использованию производственных ресурсов.

Разработанная Л.В. Канторовичем модель оптимального использования ресурсов долгое время широко не применялась в СССР по идеологическим причинам.

В 1966 г. выдающиеся ученые-экономисты В. Немчинов, В. Новожилов и математик Л. Канторович были удостоены Ленинской премии.

Академик Л.В. Канторович (СССР) и профессор Т. Купманс (США) удостоены Нобелевской премии в 1974 г. Т. Купманс в основном занимался транспортными, а Л. Канторович — производственными моделями.

Выходцами из бывшего Советского Союза являются также Саймон Кузнец (нобелевский лауреат по экономике 1971 г.) и Леонид Гурвиц (нобелевский лауреат по экономике 2007 г.).

Данная статья фактически является кратким введением в новую область исследования операций в экономической науке.

Нобелевские премии присуждаются ежегодно по физике, химии, физиологии и медицине, экономике, литературе, а также присуждаются премии мира. Премия имени Нобеля по экономике присуждается с 1969 г. (остальные премии — с 1901 г.). К настоящему времени 64 ученых-экономиста удостоены Нобелевской премии, многие из них по образованию математики. В какой-то мере это обстоятельство является компенсацией того, что Нобелевские премии по математике не присуждаются. Развитие применения математических методов в экономике способствовало развитию и самой математики. Ряд новых разделов математики возник именно на подобной основе.

Двадцатый век смело можно назвать периодом ускоренного развития общества. Появление и развитие информационных технологий способствовало интенсивному обогащению всех отраслей человеческих знаний. В частности, произошло бурное развитие экономической науки. Достижения экономической мысли в прошедшем веке огромны. Активно используя математический аппарат, экономическая наука добилась невиданной ранее строгости. На смену умозрительным допущениям, на основе которых формулировались основные положения экономической теории в XVIII и XIX вв., пришли налаженная индустрия сбора и обработки экономической статистики с использованием высокопроизводительной вычислительной техники, математические модели. Это привело к уточнению многих положений экономической науки, сформулированных ранее, и разработке принципиально новых подходов.

Одной из основ развития экономической науки стала экономическая статистика. Создана мощная индустрия фиксации и обработки огромных массивов данных, отражающих информацию по развитию народного хозяйства, отдельных отраслей и предприятий. Упрощенные допущения, удобные для анализа, заменили строгие формулировки с соответствующими математическими доказательствами. Экономическая статистика дополнялась результатами опросов общественного мнения, что существенно приблизило экономическую науку к потребностям человечества.

Надо признать, что развитие экономико-математических методов в основном шло на Западе (в значительной мере для совершенствования экономической модели США). Анализ списка лауреатов Нобелевской премии показывает, что авторами открытий в основном являются граждане США и Западной Европы, тесно связанные с американскими исследованиями. Разумеется, в США и Западной Европе представлены очень разные течения в экономической науке, зачастую противоречащие друг другу (например, монетаризм и кейнсианство).

Многие открытия отечественных экономистов также вошли в золотой фонд экономической науки. Ни один учебник по математической экономике не обходится без изложения теоремы Слуцкого, широко известны циклы Кондратьева, примеры можно продолжить. В то же время, работы многих отечественных исследователей (М.И. Туган-Барановского, А.В. Чаянова [7, 8] и др.) малоизвестны на Западе. Впрочем, в годы тоталитаризма труды репрессированных Н.Д. Кондратьева, А.В. Чаянова и др. не были известны и в СССР. Следует отметить, что никто из перечисленных отечественных исследователей не мог получить Нобелевскую премию по объективным причинам: премии по экономике присуждаются с 1969 г., к этому времени никого из них не было в живых, а посмертно премии не присуждаются. По той же причине не стали нобелевскими лауреатами такие выдающиеся западные исследователи XX в., как И. Фишер, Дж. Фон Нейман, Дж. Кейнс.

Достижения лауреатов Нобелевской премии в развитии экономико-математических методов неоспоримы. Двое нобелевских лауреатов — уроженцы России В. Леонтьев и Л. Канторович — являются создателями специального математического аппарата для государственного регулирования экономических процессов.

Открытия В. Леонтьева и Л. Канторовича были вызваны потребностями человеческой деятельности. Этим двум открытиям предшествовали два крупных события мирового значения

В 1917 г. в России произошла социалистическая революция, в результате которой практически все хозяйственные объекты (заводы, крестьянские хозяйства) перешли в собственность государства. Это означало необходимость создания новой системы управления развитием народного хозяйства страны из единого центра. Рыночная система регулирования межотраслевых связей прекратила существование.

Впервые в истории человечества по заданию правительства во главе с В.И. Лениным начались работы по разработке межотраслевого баланса России на 1923–1924 гг. с выделением финансового блока. Таким образом, идеология составления межотраслевого баланса возникла из потребности управления народным хозяйством в условиях нового общественно-политического устройства страны.

Второе событие — это мировой финансовый кризис 1929–1933 гг. (в США он именовался Великой депрессией).

В 1925 г. после окончания Ленинградского университета В. Леонтьев выехал в Германию, год работал в Китае, в 1931 г. переехал в США.

Творческая группа исследователей во главе с В. Леонтьевым, состоящая из 6 человек (математиков и экономистов), опубликовала в 1936 г. работу под названием «Модель межотраслевого баланса», математическая формулировка которой достаточно проста: $AX + Y = X$, где $A = (a_{ij})_{n \times n}$ — квадратная матрица коэффициентов прямых затрат продукции i-й отрасли на единицу продукции j-й отрасли, Y — вектор конечного потребления (продукта), каждая компонента которого y_i — величина конечного продукта i-й отрасли, X — вектор валового продукта. В этих обозначениях вектор конечного продукта Y задается экзогенно, а вектор валового продукта X определяется следующим образом: $X = (E - A)^{-1}Y$, где E — единичная матрица, элементы обратной матрицы $(E - \mathrm{A})^{-1} = B = (b_{ij})_{n \times n}$ являются коэффициентами полных затрат. В. Леонтьев осуществил практическое применение своей модели для анализа сбалансированности американской экономики [5]. В поздних публикациях В. Леонтьев достаточно уверенно (особенно после получения Нобелевской премии) утверждал, что прошедшая американская депрессия в 1929–1932 гг. больше не повторится. Однако величайший экономист XX в. не смог предсказать финансовый кризис: при его жизни не было финансовых пирамид, ВТО (Всемирной торговой организации), ипотечного кредитования, когда многие субъекты рынка не возвращают банковские кредиты. Впрочем, подобный прогноз после выхода из Великой депрессии делал и Дж. Кейнс. Великие тоже ошибаются!

Модель В. Леонтьева широко использовалась в 1960–1970 гг. на различных уровнях планирования в СССР, союзных республиках и некоторых автономных образованиях в основном учеными АН СССР.

С развитием промышленности и сельского хозяйства потребляется все больше природных ресурсов (полезные ископаемые, в том числе руды черных и цветных металлов и т. д.), для рационального использования которых необходимо было решать задачи экономико-математического моделирования. Например, рационализация схем перевозок исходного сырья, промышленной и сельскохозяйственной продукции в масштабах нашей огромной территории приводит к крупной экономии средств. Возникли проблемы в планировании производства промышленной продукции, связанные с использованием множества различных взаимозаменяемых ресурсов. Так, в производстве мебели, где используются одни и те же исходные материалы при изменяющемся ассортименте конечного продукта, получались различные отходы при раскрое материалов.

В конце 30-х гг. XX в. руководство Ленинградской мебельной фабрики обратилось к молодому профессору-математику Ленинградского госуниверситета Л. Канторовичу. В результате был выделен новый класс экстремальных задач (задачи линейного программирования), не решаемых стандартными методами математического анализа. Л. Канторович разработал специальный алгоритм решения этого класса задач. Результаты были опубликованы в небольшой брошюре «Математические методы организации и планирования производства», опубликованной в 1939 г. Но в то время власти запретили использование идей Л. Канторовича, и он продолжил исследования в области функционального анализа. После смерти И.В. Сталина он возвращается к этой проблематике, в 1959 г. выходит в свет его книга «Экономический расчет наилучшего использования ресурсов» [6]. Метод решения задач линейного программирования, предложенный Л. Канторовичем, был обобщен и строго обоснован Дж. Данцигом [4].

Модель Л. Канторовича в матричном виде записывается очень просто:

$$\max\{L(X) = (C, X): AX \leq B, X \geq 0\},$$

где C — вектор цен на выпускаемые виды продукции, X — вектор выпуска продукции, A — матрица удельных затрат ресурсов в производственном процессе, B — вектор ограничений на использование ресурсов, T — знак транспонирования матрицы [1].

Модель оптимального использования ресурсов широко используется в условиях рыночной экономики, развиваются различные модификации, учитывающие специфику различных отраслей.

При использовании модели Л. Канторовича принципиальное значение имеет формирование ограничивающих условий, то есть надо знать перечень ресурсов и верхние границы возможного их использования, например, финансовый ресурс. При командной экономике он не имел принципиального значения, а при либерально-рыночной экономике финансовый ресурс жестко ограничен. В этой связи следует отметить, что началом нынешнего глубокого финансового кризиса явилось либеральное ипотечное кредитование в США. Поскольку США является гигантским потребителем мировой промышленной продукции, это привело к неплатежеспособности финансовой системы не только США, но и всего мира. Конечный результат таков: прекращение производства важнейших видов промышленной продукции (черных металлов, продукции машиностроения, в том числе автомобилей, топливных ресурсов и т. д.), остановились крупные заводы, налицо массовая безработица. Сказанное означает, что финансовый ресурс является мощным регулятором. Отсюда следует вывод: если у предприятия имеются собственные оборотные средства (то есть заработанные), то оно перенесет нынешний финансовый кризис менее болезненно, нежели ориентированное в своей деятельности на внешние финансовые вливания.

1. Классическая модель Л. Канторовича оптимального использования ресурсов

Как указывалось выше, само возникновение и развитие линейного программирования, основой которого является модель Л. Канторовича, непосредственно связано с экономической проблематикой. Термин «линейное программирование» появился в 1951 г. в работах американских ученых Дж. Данцига и Т. Купманса. Слово «программирование» объясняется тем, что набор переменных, подлежащих нахождению, обычно определяет программу (план) работы некоторой экономической системы. Первые исследования по линейному программированию (задачи оптимального использования производственных ресурсов, критерий оптимальности, геометрическая интерпретация, методы нахождения оптимального решения, экономическая интерпретация результатов) были проведены в 30-х гг. XX в. в Ленинградском университете Л.В. Канторовичем. Толчком к открытию ЛП (линейного программирования) является математический анализ рационального раскроя материалов при подготовке заготовок (в частности, в мебельной промышленности).

Современная формулировка задачи ЛП такова (задача 1): найти вектор $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, удовлетворяющий ограничениям

$$x_j \geq 0,\ j = 1, 2, \ldots, n,$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \leq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \leq b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \leq b_m \end{cases}$$

и максимизирующий линейную целевую функцию

$$L(X) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n.$$

В компактной форме задача ЛП записывается так:

$$\max\{L(X) = (C, X){:}\ AX \leq B, X \geq 0\},$$

где (C, X) — скалярное произведение векторов $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \ldots \\ c_n \end{pmatrix}$ и $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}$, $A = \left\| a_{ij} \right\|$ — матрица, составленная из коэффициентов системы ограничений. Неравенство для матриц означает, что это неравенство справедливо для всех пар соответствующих элементов матриц, неотрицательность матрицы — неотрицательность всех ее элементов.

Экономически задача 1 интерпретируется следующим образом. Пусть предприятие может производить n видов продукции. Производство каждого вида продукции требует затрат материалов, производственных мощностей, трудовых ресурсов, в том числе финансовых ресурсов (всего ресурсов m), причем i-м ресурсом предприятие располагает в количестве $b_i (i = 1, 2, \ldots, m)$. Если x_j — объем производства j-го продукта, a_{ij} — затраты i-го ресурса на производство единицы j-го продукта, то ограничения в задаче 1 отражают невозможность планирования производства таким образом, чтобы какого-нибудь ресурса не хватило. Любой набор переменных (вектор X), удовлетворяющих ограничениям задачи (1), называется *допустимым* решением. Ресурсами на производство продукции, соответствующими любому допустимому решению, предприятие располагает, но, естественно, желает производить продукцию в таких объемах, которые дают максимальный доход. Если c_j — доход предприятия от реализации единицы j-го продукта, то общий доход предприятия равен $L(X) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$. Тем самым, следует искать такое допустимое решение, для которого значение $L(X)$ максимально. Таким образом, мы приходим к задаче 1. Допустимое решение, максимизирующее целевую функцию, называется *оптимальным*. Оптимальный вектор задачи 1 будем обозначать $\overline{X} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$. В данном примере элементы матриц A, B, C неотрицательные, в общем случае это условие может не выполняться.

Разумеется, сформулированная задача линейного программирования (линейная, поскольку все ограничения являются линейными неравенствами от искомых величин x_j, и линейной является целевая функция) опирается на ряд предположений, которые являются идеализацией реальных экономических условий. Например, мы считаем, что если предприятию дать вдвое больше ресурсов, то оно сможет произвести и вдвое больше продукции, хотя есть естественные ограничения производственного характера. Далее, в этой модели игнорируется рыночный механизм ценообразования: если предприятие произведет продукции в 10 раз больше, то сомнительно, что оно сможет реализовать продукцию по той же цене. Тем не менее, в некоторых разумных рамках задачи ЛП полезны, по крайней мере, как ориентир.

Отметим неприятности, которые подстерегают исследователя при решении задачи ЛП:

1. Множество допустимых решений пустое, то есть совокупность ограничений несовместна.

2. Множество допустимых решений непустое, но целевая функция на нем неограниченна. Задача, которая обладает одним из этих свойств, является неразрешимой. Если задача разрешимая, то можно доказать, что решение задачи (оптимальный вектор) существует.

3. Задача имеет неединственное решение (в этом случае решений бесконечно много).

Первые две ситуации говорят о том, что задача плохо сформулирована, если она описывает реальную ситуацию. В третьем случае для выбора решения следует привлекать дополнительные соображения.

Основная заслуга Л. Канторовича заключается в том, что он наряду с задачей 1 построил на тех же исходных данных другую задачу, так называемую двойственную. Оказалось, что на основе совместного рассмотрения обеих задач можно построить эффективные алгоритмы их решения. Ситуация парадоксальная: пару задач легче решать, чем каждую из них! Следует отметить, что формулировка двойственной задачи возникла как аналог некоторых конструкций, используемых в функциональном анализе.

Двойственная задача к задаче 1 (задача 1*) записывается следующим образом.

Найти вектор $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$, компоненты которого удовлетворяют условиям $y_i \geq 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{m1}y_n \geq c_1, \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{m2}y_n \geq c_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \ldots + a_{mn}y_n \geq c_m \end{cases}$$

и минимизирующий линейную функцию

$$L^*Y = b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_my_m.$$

В компактной форме задача 2 имеет вид:

$$\min\{L^*(Y) = (B, Y)\colon A^TY \geq C,\ Y \geq 0\},$$

где A^T — транспонированная матрица, все обозначения из задачи 1.

Двойственной задаче можно дать простую экономическую интерпретацию. Допустим, что предприятие продает свои ресурсы некоторой компании. Цены ресурсов неизвестны, их предстоит назначить. Пусть цена единицы i-го ресурса составит y_i, естественно, $y_i \geq 0$. Продавец не может допустить нарушения неравенств вида $a_{1i}y_1 + a_{2i}y_2 + \ldots + a_{mi}y_m \geq c_i$ при $i = 1, 2, \ldots, n$, поскольку в этом случае продавать ресурсы невыгодно. Покупатель эти соображения принимает, но при этом желает приобрести ресурсы как можно дешевле. Но общая стоимость ресурсов составляет $L^*Y = b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_my_m$.

Тем самым, компоненты решения задачи 1*, то есть оптимального вектора $\overline{Y} = (\overline{y}_1, \overline{y}_2, \ldots, \overline{y}_m)$, можно интерпретировать экономически как цены (сравнительную эффективность использования) производственных ресурсов. Величины $\overline{y}_1, \overline{y}_2, \ldots, \overline{y}_m$ часто называют двойственными оценками ресурсов, теневыми ценами ресурсов, множителями Лагранжа (происхождение этого термина кроется в теории условного экстремума), объективно обусловленными оценками ресурсов.

Задачу 1* простыми преобразованиями (см. далее) можно привести к форме задачи 1, то есть ограничения снизу заменить на ограничения сверху, а задачу минимизации — на задачу максимизации. Тогда задача, двойственная к задаче 1*, совпадет с задачей 1. Поэтому можно говорить о паре взаимно двойственных задач. Решения задач 1 и 1* тесно взаимосвязаны. Приведем формулировки теорем, подтверждающих их взаимосвязи.

Теорема 1 (теорема двойственности)

Если задачи 1 и 1* (пара двойственных задач) имеют допустимые решения, то обе они имеют и оптимальные решения, причем

$$\max \sum_{j=1}^{n} c_j \overline{x}_j = \min \sum_{i=1}^{m} b_i \overline{y}_i.$$

При этом, если неразрешима одна из пары двойственных задач, то неразрешима и вторая.

Теорема 2 (признак оптимальности)

Для того чтобы допустимое решение $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ задачи 1 было оптимальным, необходимо и достаточно, чтобы нашлось такое допустимое решение $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$ задачи 1 *, для которого

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i.$$

При этом из неравенства $\overline{x}_j > 0$ следует равенство $\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\overline{y}_i = c_j$, а из неравенства $\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\overline{y}_i > c_j$ — равенство $\overline{x}_j = 0$. Аналогично, из неравенства $\overline{y}_i > 0$ следует равенство $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\overline{x}_i = b_i$, а из неравенства $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\overline{x}_i < b_i$ — равенство $\overline{y}_i = 0$.

Последние утверждения равносильны следующим равенствам:

$$\overline{x}_j\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\overline{y}_i - c_j\right) = 0\left(j = 1, 2, \ldots, n\right),$$

$$\overline{y}_j\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\overline{x}_j - b_i\right) = 0\left(i = 1, 2, \ldots, m\right).$$

Эти условия называются условиями дополняющей нежесткости.

Приведем экономическую интерпретацию сформулированных теорем.

1. $L(\overline{x}) = L^*(\overline{y})$. Это равенство означает, что общая полезность выпускаемой продукции равна общей оценке используемых ресурсов, если производство ведется в оптимальном режиме.

2. Если в оптимальном режиме производства $\overline{y}_i > 0$, то $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\overline{x}_j = b_i$, то есть если оценка ресурсов положительна, то этот ресурс в производстве используется полностью. Такой ресурс является дефицитным.

3. Если в оптимальном режиме производства $\bar{x}_j > 0$, то $\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\overline{y_i} = c_j$, то есть если производить какой-нибудь вид продукции выгодно (рентабельно), то общая оценка используемых ресурсов на единицу продукции равна цене единицы этой продукции.

4. Если в оптимальном режиме производства $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\overline{x_j} < b_i$, то $\bar{y}_i = 0$, то есть если ресурс не используется полностью, то его оценка (цена) равна нулю. Такой ресурс в избытке, он не дефицитный.

5. Если в оптимальном режиме производства $\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\overline{y_i} > c_j$, то $\bar{x}_j = 0$, то есть если суммарная оценка ресурсов на единицу продукции превосходит ее полезность, то эту продукцию производить не следует.

Из смысла задачи 1 видно, что значение целевой функции $L(\bar{x})$ (общей полезности) зависит от величин выделенных дефицитных ресурсов. Отсюда следует, что увеличение дефицитных ресурсов ведет к увеличению значения целевой функции (то есть к росту качества системы), а уменьшение их — к снижению качества (общей полезности). Это говорит о целесообразности исследования зависимости эффективности производства, то есть оптимального значения целевой функции, от параметров модели $b_1, b_2, \ldots, b_m$, то есть исследовать функцию $L(X) = L(\overline{X}) = M(b_1, b_2, \ldots, b_m)$.

Имеет место следующий факт: функция $M(b_1, b_2, \ldots. b_m)$ является неубывающей по каждой переменной, причем частные производные $\frac{\partial M}{\partial b_1}$ равны $\bar{y}_i$ при ($j = 1, 2, \ldots, m$). По формуле Тейлора $\Delta L\left(\overline{X}\right) = \Delta M \approx \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial M}{\partial b_i}\Delta b_i = \sum_{i=1}^{m} \overline{y}_i \Delta b_i$ при малых приращениях Δb_i, то есть при малых изменениях ресурсов общая полезность производства в оптимальном режиме $L\left(\tilde{X}\right) \approx L\left(\overline{X}\right) + \sum_{i=1}^{m} \overline{y}_i \Delta b_i$, где $\tilde{X}$— решение задачи 1 при величине ресурсов $\tilde{b}_i = b_i + \Delta b_i$ ($i = 1, \ldots, m$).

В частности, если $\Delta b_i < 0$ ($i = 1, \ldots, m$), то общая прибыль падает (качество системы снижается). Этот вывод понятен: при уменьшении всех ресурсов прибыль вырасти не может.

Компоненты оптимального вектора двойственной задачи естественно интерпретировать как меру дефицитности ресурсов: чем компонента больше, тем ресурс дефицитнее, в частности, недефицитный ресурс имеет нулевую оценку. Рост общей полезности при добавлении единицы ресурса, как следует из предыдущего, равен так определенной мере дефицитности. Если ранжировать ресурсы по степени дефицитности, то есть по величине $\bar{y}_1, \bar{y}_2, \ldots, \bar{y}_m$, то получим рейтинг качества ресурсов.

Если известны прогнозные показатели объемов поступления ресурсов, то есть если прогнозируются закономерности изменения ресурсов во времени (например, но линейному закону $b_i = b_i^0 + \Delta b_i t, 0 \le t < \infty$), то можно проследить эволюцию системы, используя при этом аппарат так называемого параметрического программирования.

Практически важным является анализ устойчивости оптимального решения обеих задач при изменениях технологических коэффициентов (т. е. элементов матрицы $A = (a_{ij})_{n\times m}$).

Пусть $L(\overline{X}) = N(A) = N(a_{11}, \ldots, a_{ij}, \ldots, a_{mn})$.

Имеет место следующий факт. Если задачи 1 и 2 имеют единственные оптимальные решения $\overline{X} = (\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$ и $\overline{Y} = (\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_m)$, то $\frac{\partial N\left(A\right)}{\partial a_{ij}} = \overline{y}_i \overline{x}_j$, то есть степень влияния технологических коэффициентов на общую прибыль определяется через компоненты решений обеих задач. Изменения коэффициентов матрицы A происходят в результате инноваций в соответствующей отрасли.

Ранее нигде не говорилось о том, что именно производится и в каких единицах измеряется продукция. При постановке задачи 1 предполагалось, что производство каждого вида продукции может быть выражено любым неотрицательным числом (это могут быть килограммы, литры и т. д.). Например, предприятие может произвести 150,25 кг некоторого химического соединения. Если продукция предприятия выпускается в штуках (например, станки, журналы и т. п.), то задачу надо модифицировать. Возникает задача целочисленного линейного программирования (ЦЛП, задача 2): найти вектор $X = (x_1, \ldots, x_n)$, удовлетворяющий ограничениям

$x_j > 0, j = 1, 2, \ldots, n$, числа x_j целые.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le c_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{m1}y_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \ge b_m \end{cases}$$

и максимизирующий линейную целевую функцию

$$L(X) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n.$$

Условие целочисленности может быть наложено на часть переменных. Алгоритмы решения задач ЦЛП сложнее. При дополнительном условии целочисленности, естественно, максимальное значение целевой функции не увеличивается (целочисленные допустимые решения являются допустимыми и для задачи 1). Решая задачу 1, можно получить верхнюю оценку оптимума целевой функции в задаче 2, Для задачи 2 связь с двойственной задачей не является столь сильной, тем не менее, компоненты оптимального вектора в двойственной задаче используются как объективно обусловленные оценки ресурсов. Этот подход также восходит к Л. Канторовичу.

В заключение отметим, что рассмотренная модель Л. Канторовича изучена достаточно полно и получила широкое применение во многих отраслях знаний. Этому способствовало развитие компьютерных технологий.

2. Формы задач линейного программирования. Построение двойственных задач

Задачу ЛП можно представить в различных формах. Форма, в которой задача была представлена в предыдущем пункте, называется симметричной, поскольку двойственная задача имеет аналогичную форму.

В общем случае задачей ЛП называется задача минимизации или максимизации линейной функции на подмножестве многомерного пространства, которое задается совокупностью линейных уравнений или неравенств. Любую такую задачу можно привести к симметричной форме. Опишем соответствующие преобразования.

А. На переменные могут не налагаться условия неотрицательности. Для соответствующего преобразования следует использовать тот факт, что любое число можно представить в виде разности двух неотрицательных чисел. Таким образом, если x_i — переменная, на которую не наложено условие $x_i \geq 0$, то следует заменить эту переменную на разность $x_i = x_i' - x_i''$ двух новых переменных и положить $x_i' \geq 0,\ x_i'' \geq 0$.

Б. Если какое-либо ограничение имеет форму $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \geq b_i$, то его следует заменить на равносильное неравенство $-a_{i1}x_1 - a_{i2}x_2 - \ldots - a_{in}x_n \geq -b_i$.

В. Если какое-либо ограничение имеет форму равенства $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = b_i$, то его следует заменить на пару неравенств $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \leq b_i$, $-a_{i1}x_1 - a_{i2}x_2 - \ldots - a_{in}x_n \leq -b_i$.

Г. Наконец, если целевую функцию необходимо минимизировать, то максимизировать следует исходную целевую функцию, умноженную на (−1).

Наряду с симметричной формой задачи ЛП, рассмотренной выше, важную роль играет каноническая форма задачи ЛП. Именно для этой формы разработан наиболее популярный алгоритм решения — симплекс-метод, который за конечное число итераций либо находит решение, либо устанавливает его отсутствие.

Каноническая форма задачи ЛП (задача 3) имеет вид

$$L(X) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max$$

при условиях:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, (i = 1, 2, \ldots, m),$$

$$x_j \geq 0, (j = 1, 2, \ldots, n).$$

К виду 3 также можно привести любую задачу ЛП. Наряду с описанными ранее может потребоваться еще одно преобразование.

Пусть ограничение задано в виде неравенства $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i$. Введем дополнительно неотрицательную переменную $z_i > 0$ так, чтобы выполнялось равенство $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + z_i = b_i$. В преобразованной задаче число переменных стало больше. Дополнительные переменные z_i имеют простой экономический смысл: при интерпретации, описанной выше, это объем ресурса i-го вида, не израсходованный при некотором плане производства.

Можно показать, что соответствующая двойственная задача имеет вид: $L^*(Y) = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \to \min$ при условиях $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} y_i \geq c_j$ ($j = 1, 2, \ldots, n$), переменные y_i — произвольного знака (!).

В общем случае в исходной задаче могут быть смешанные ограничения (равенства и неравенства противоположных знаков) и на часть переменных может не накладываться условие неотрицательности: $L(X) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max$ при условиях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i \text{ при } i = 1, 2, \ldots, l_1;$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \text{ при } i = l_1 + 1, l + 2, \ldots, l_2;$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i \text{ при } i = l_2 + 1, \ldots, m;$$

$$x_j \geq 0 \text{ при } j = 1, 2, \ldots, n_1;$$

x_j имеет произвольный знак при $j = n_2 + 1, \ldots, n_2$;

$$x_j \le 0 \text{ при } j = n_2 + 1, \ldots, n.$$

Можно показать, что соответствующая двойственная задача имеет вид:

$$L^*(Y) = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \to \min \text{ при условиях}$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} y_i \ge c_j \text{ при } j = 1, 2, \ldots, n_1;$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} y_i = c_j \text{ при } j = n_1 + 1, \ldots, n_2;$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} y_i = c_j \text{ при } j = n_2 + 1, \ldots, n;$$

$y_i \ge 0$ при $i = 1, 2, \ldots, l_1$; имеет произвольный знак при $i = l_1 + 1, \ldots, l_2$; $y_i \le 0$ при $i = l_2 + 1, \ldots, m$.

3. Структурные преобразования в экономике [1]

В нашей стране происходит стремительный структурный сдвиг, вызванный свертыванием военной промышленности. Трудно привести пример такого явления в мировой практике. За каких-нибудь 10 лет произошел сдвиг, который на Западе (в индустриальных странах) осуществлялся за 30 с лишним лет.

Попытаемся оценить эффективность структурного сдвига, осуществленного в основном стихийно или под воздействием политических потрясений, используя модели межотраслевого баланса.

Напомним, что модель межотраслевого баланса (МОБ) в статической постановке имеет вид:

$$AX + Y = X,$$

где $A = (a_{ij})_{n \times n}$ — матрица прямых затрат продукции одной отрасли единицу продукции другой; X — n-мерный вектор выпуска валового выпуска; Y — n-мерный вектор выпуска конечного продукта.

Введем в рассмотрение так называемый структурный вектор $C = (c_1, c_2, \ldots, c_n)^T$, где $c_i \ge 0$ — доля конечного продукта i-й отрасли в суммарном конечном продукте народного хозяйства. Это означает, что выполняется равенство $c_1 + c_2 + \ldots + c_n = 1$.

Таким образом, $Y = \lambda C$, где λ — суммарный конечный продукт в стоимостном выражении. У вектора C из года в год меняются компоненты, то есть меняются доли отраслей в конечном продукте. Для дальнейшего анализа модель В. Леонтьева перепишем в следующей форме: $AX + C\lambda = X$.

Естественно поставить задачу максимизации суммарного конечного продукта λ при естественных ограничениях

$$AX + C\lambda = X \le B, X \ge 0, \lambda \ge 0,$$

где B — вектор ограничений на валовой выпуск отдельных видов продукции, непосредственно связанный с мощностями соответствующих отраслей.

Пусть $\bar{\lambda}$, $\bar{X}$ — оптимальное решение оптимизационной модели МОБ при фиксированном векторе C. Очевидно, что оптимум задачи $\bar{\lambda}$ зависит от параметров задачи, то есть от A, C, B. Для решения поставленной задачи рассмотрим $\bar{\lambda}$ как функцию от вектора C. Пусть C^0 — структурный вектор в начале периода $[t_0, t_1]$. Поставим следующий вопрос: если структурный вектор в течение рассматриваемого периода переходит из состояния C^0 в состояние C^1, то какое приращение получит функция $\bar{\lambda}(C)$? Приращение вектора C равно $\Delta C = C^1 - C^0$. Среди компонент вектора ΔC есть как положительные, так и отрицательные (сумма компонент вектора ΔC равна 0). Вычислим величину $\Delta\bar{\lambda} = \bar{\lambda}(C^1) - \bar{\lambda}(C^0) = \bar{\lambda}(C^0 + \Delta C) - \bar{\lambda}(C^0)$, то есть приращение функции по направлению вектора ΔC. Как известно из математического анализа,

$$\Delta\bar{\lambda} \approx \sum_{i=1}^{n} \left.\frac{\partial\bar{\lambda}}{\partial c_i}\right|_{C=C^0} \Delta c_i,$$

где $\left.\dfrac{\partial\bar{\lambda}}{\partial c_i}\right|_{C=C^0}$ — частная производная, вычисленная в точке $C = C^0$, Δc_i — компонента вектора ΔC.

Напомним, что если двойственная задача имеет единственное решение, то $\left.\dfrac{\partial\bar{\lambda}}{\partial c_i}\right|_{C=C^0} = \bar{y}_i \cdot \bar{\lambda}$ при $i = 1, \ldots, n$, где $\bar{y}_i$ — оптимальная двойственная оценка соответствующего ограничения прямой задачи (целевая функция двойственной задачи имеет вид $\sum_{i=1}^{n} \lambda y_i c_i$).

Таким образом, интересующее нас приращение оптимума прямой задачи в зависимости от изменения структурного вектора C имеет следующий вид:

$$\Delta\bar{\lambda} \approx \sum_{i=1}^{n} \overline{\lambda \cdot y_i} \cdot \Delta c_i$$

Эта формула может трактоваться как новая экономическая закономерность, выведенная с помощью сложного математического аппарата. Мы называем величину $\Delta\bar{\lambda}$ интегральным эффектом структурного сдвига в народном хозяйстве. Традиционные методы оценки результатов структурного сдвига, основанные на сложении эффектов в отдельных отраслях, не выдерживают серьезной критики. Дело в том, что все отрасли взаимосвязаны и взаимообусловлены. По этой причине эффект, полученный в одной отрасли, может компенсировать эффект в другой.

Встает вопрос: можно ли управлять направлением структурных преобразований? Ответ утвердительный. Возможность управления структурным преобразованием показала командно-административная система управления экономикой, при которой все рычаги инвестирования находились в руках центра. Эффективно ли управлял центр — вопрос другого плана.

Что касается управления этим процессом в условиях рыночной экономики, ответ тоже будет утвердительным, но это очень сложный путь. Дело в том, что инвестирование в экономику осуществляется из многих источников, причем критерием качества инвестировании служит эффективность.

Отметим также, что в структурном преобразовании усиливается роль регионального управления.

4. Региональная модель оценки структурного сдвига

Базовая модель для расчета интегрального эффекта от структурного сдвига в регионе имеет следующую структуру:

$$F = \max\left\{\lambda + \sum_{i=1}^{n} p_i v_i - \sum_{i=1}^{n} q_i u_i\right\},$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + u_i - v_i + c_i \lambda = x_i,$$

$$0 \le u_i \le d_i, \;\; v_i \ge D_i,$$

$$\underline{b}_i \le x_i \le \overline{b}_i, \;\; \sum_{i=1}^{n} c_i = 1,$$

$$c_i \ge 0 \;\; (i = 1, \ldots, n).$$

Опишем основные параметры и переменные модели.

Искомые переменные: x_i — объем продукции i-й отрасли экономики региона; u_i — импорт продукции i-й отрасли экономики региона; v_i — экспорт продукции i-й отрасли в регион; λ– полный объем конечного продукта.

Параметры модели: c_i, как и выше, доля продукции i-й отрасли в конечном продукте; a_{ij} — коэффициент прямых затрат продукции i-й отрасли на единицу продукции j-й отрасли; $\underline{b}_i$, $\overline{b}_i$ — предельные значения объемов выпускаемой в регионе продукции i-й отрасли; d_i — предельные значения импорта в регион продукции i-й отрасли; D_i — предельные значения экспорта из региона продукции i-й отрасли, p_i — цена на обязательную поставку продукции i-й отрасли, q_i — «договорные» цены на ввоз продукции i-й отрасли.

В модель могут вводиться ограничения на предельно допустимые объемы валового выпуска продукции по отраслям, включаются ограничения на экспорт, импорт. Модель была построена для 14 отраслей:

1) электроэнергетическая промышленность;
2) топливная промышленность;
3) металлургическая промышленность;
4) химическая и нефтехимическая промышленность;
5) машиностроение и металлообработка;
6) лесная и деревообрабатывающая промышленность;
7) промышленность стройматериалов и стекольная промышленность;
8) легкая промышленность;
9) пищевая промышленность;
10) прочие отрасли промышленности;
11) сельское хозяйство;
12) строительство;
13) транспорт и связь;
14) прочие отрасли экономики.

Количество искомых переменных — 43, модель включает 15 ограничений в форме равенств. В качестве основы для информационной базы были использованы межотраслевые балансы за 1992–1996 гг. Была проведена серия расчетов по построенной модели модифицированным симплекс-методом, реализованным на языке программирования TURBO PASCAL.

Для оценки влияния структурных сдвигов на экономическое развитие региона необходимо учитывать интегральный эффект: как и выше, суммирование эффектов по отдельным отраслям, рассматриваемым изолированно, не дает адекватной картины. В данной модели предлагается определять интегральный эффект с использованием частных производных и двойственных оценок.

Искомое приращение функции от изменения вектора C, приближенно, как и выше, определяется по формуле

$$\Delta F \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial c_i} \Delta c_i.$$

Если задача, двойственная к исходной, имеет единственное решение и $\overline{Y} = (\overline{y}_1, \overline{y}_2, \ldots, \overline{y}_n)$ — оптимальный двойственный вектор ($\overline{y}_1$ — двойственная оценка i-го ограничения), $\overline{\lambda}$ — оптимальное значение конечного продукта, то

$$\frac{\partial F}{\partial c_i} = \overline{\lambda} \cdot \overline{y}_i,$$

откуда $\Delta F \approx \sum_{i=1}^{n} \bar{\lambda} \cdot \bar{y}_i \cdot \Delta c_i$.

Таким образом, оптимальные двойственные оценки балансовых соотношений исходной модели служат мерилом оптимальных структурных сдвигов.

Учеными накоплен богатый опыт в области построения экономико-математических моделей, отражающих различные стороны процесса общественного воспроизводства. Приведенные модели межотраслевого баланса позволяют рассчитать эффективность структурных сдвигов.

Модифицированная модель межотраслевого баланса, описанная выше, позволяет выбрать наиболее подходящую вычислительную схему. Так, для исчисления эффективности уже происшедших за какой-то период структурных сдвигов целесообразно использовать статическую модель межотраслевого баланса как наиболее простую и удобную в работе.

Достоинство данного метода заключается в том, что он дает детальное представление как о производстве и распределении продукции отдельных отраслей, так и о характере взаимосвязей между этими отраслями.

Важным вопросом при оценке эффективности межотраслевых структурных сдвигов является классификация отраслей. Предъявляемые требования: во-первых, должна быть возможность сопоставимости во времени, во-вторых, уровень агрегированности отраслей не должен быть чрезмерным: чем крупнее отрасль, тем меньше возможности для выявления реального вклада каждой подотрасли в совокупный эффект структурных сдвигов, так как погашаются разнонаправленные эффекты. Напомним, что мы приняли классификацию, включающую 14 отраслей экономики.

В задаче, двойственной к проблеме максимизации национального дохода, минимизируются использованные ресурсы.

При региональном анализе двойственная задача позволяет сформировать новую точку зрения на структуру взаимосвязи между региональными факторами и позволяет проверить адекватность исходной модели. В частности, оптимальная двойственная оценка той или иной отрасли показывает, насколько возросло бы максимальное значение целевой функции, если бы объем ресурса данной отрасли увеличился на единицу. Таким образом, двойственные оценки измеряют эффективность малых приращений объемов ресурсов.

Если ограничение не оказывает сдерживающего влияния (то есть является строгим неравенством при оптимальном решении исходной задачи), то соответствующая компонента оптимального решения двойственной задачи равна нулю. Следовательно, мы располагаем избыточными соответствующими ресурсами, некоторая доля ресурса остается неиспользованной. Однако оптимизационная задача может иметь множество оптимальных решений, то есть обеспечивающих получение максимального объема производства, и при другом оптимальном решении ресурс может использоваться полностью.

Определение необходимого объема производства по каждой отрасли может оказаться необоснованным, если не принята во внимание ограниченность наличных ресурсов. Поэтому рассчитанные с помощью межотраслевого баланса показатели объемов производства по отраслям должны сопоставляться с реальными возможностями их достижения с точки зрения обеспечения их имеющимися ресурсами.

Структурные диспропорции как отраслевого, так и технологического плана, возникшие в недрах административно-командного управления экономикой, получили новое развитие при либерализации системы хозяйствования и демонтаже структур управления, поскольку равновесные рыночные регуляторы отсутствовали. Эти диспропорции сформировали мощный структурный импульс, расширивший масштабы и глубину экономического спада, усиливший кризисные процессы в народнохозяйственном развитии республики. Отрицательный потенциал этих деформаций проявился в полной мере в 1993–1994 гг.

Структурные деформации, связанные с развалом СЭВ (прекращение процессов международного разделения труда и специализации производства), сказались на дефиците внутреннего рынка и поставили в очень сложное положение многие отрасли промышленности.

Усиление структурного кризиса в значительной степени вызвало развал СССР. В результате разрушения действовавшего единого народнохозяйственного механизма образовалось множество неприспособленных к автономному существованию народнохозяйственных комплексов — все это обострило структурные проблемы, сужая возможности их решений. Глубина возникших межотраслевых диспропорций наиболее ярко проявляется в таких технологически взаимосвязанных отраслях, как производство нефтяного оборудования, нефтедобыча, нефтепереработка, транспорт и ряд других отраслей.

Положительное значение интегрального эффекта в 1995–1996 гг. объясняется действием стихийных рыночных факторов, в том числе закрытием заранее нерентабельных производств. Процесс структурной перестройки экономики региона, происходящий в рыночных условиях, неизбежно связан с ускоренным развитием, реконструкцией одних производств и свертыванием и закрытием других, с интенсивным развитием более эффективных и конкурентоспособных предприятий и производств.

Список источников

1. *Гизатуллин Х. Н.* Проблемы управления сложными системами. — Уфа: Ин-т социально-эконом. исследований УНЦ РАН, 2004.

2. *Гизатуллин Х. Н.* Синтез моделей функционального анализа и оптимизация управления структурными сдвигами // Журнал экономической теории. — 2010. — № 4.

3. *Гизатуллин Х. Н.*, *Бронштейн Е. М.*, *Антонов Д. В.* Фундаментальные открытия в математической экономике отечественных ученых в XX веке: учеб. пособие. — Уфа: УГАТУ, 2010.

4. *Данциг Дж.* Линейное программирование, его применение и обобщение : пер. с англ. — М.: Прогресс, 1966.

5. Исследование структуры американской экономики / Леонтьев В. и др. — М.: Госстатиздат, 1958.

6. Канторович Л. Экономический расчет наилучшего использования ресурсов. — М.: Наука, 1959.

7. *Кондратьев И. Д.* Избранные сочинения. — М.: Экономика, 1991.

8. *Корнейчук Б.* Экономические воззрения М. И. Туган-Барановского. — СПб.: Наука, 2008.

9. Мировая экономическая мысль. Т. V. Всемирное признание лекций нобелевских лауреатов / Отв. ред. тома чл.-кор. РАН Г. Г. Фетисов. — М.: Мысль, 2004.

УДК 330.101

Ключевые слова: модель межотраслевого баланса, модель оптимального использования ресурсов, региональная модель оценки структурного сдвига