О РАЗМЕРНОСТНОЙ ПРОБЛЕМЕ В ЭКОНОМИКЕ: ПРОИЗВОДСТВЕННАЯ ФУНКЦИЯ КАК ПСЕВДО ЧЕРНЫЙ ЯЩИК[1]

В. К. Горбунов

Рассматривается так называемая проблема размерностей, которая спорадически поднимается в зарубежной и отечественной литературе относительно производственных функций (ПФ) и функций полезности, используемых в экономической теории и экономическом анализе. Критики этих функциональных моделей объявляют нелегитимным применение трансцендентных операций (логарифмирование, возведение в дробную степень) к «именованным величинам» и допускают только индексные варианты ПФ. В статье аргументируется ошибочность размерностных претензий к фрагментам производственных функций, непоследовательность и контрпродуктивность ограничения метода ПФ индексным вариантом, а также полезность последнего для преодоления вычислительной сложности задачи оценивания параметров функций сложных классов.

«…Папенька поднял крышку на табакерке, и что же увидел Миша? И колокольчики, и молоточки, и валик, и колеса... Миша удивился: “Зачем эти колокольчики? зачем молоточки? зачем валик с крючками?”»
В. Одоевский «Городок в табакерке» [22]

Введение

В работах Л. Вальраса [4] и других основателей неоклассического анализа конца XIX в., а также их последователей, прежде всего П. Самуэльсона [25], была начата важная работа по пересмотру и развитию экономической науки по примеру естественных наук. Основными ориентирами стали классические физика и механика, которые к этому времени достигли высокого уровня понимания принципов построения материального мира и решения многих прикладных проблем. Основой этих успехов было использование математики как точного и лаконичного языка описания сложных явлений и метода получения доказательных знаний. Однако к середине XX в. стало очевидно, что экономические явления обладают особой сложностью, так как они определяются людьми, обладающими волей, индивидуальными вкусами и часто действующими спонтанно. Кроме того, изучение экономических агентов (потребителей, фирм, их объединений) осложняется нестабильностью условий наблюдения за ними и трудностью проведения экспериментов, подобных лабораторным в естественных науках. Эти особенности поставили перед математикой задачу создания новых инструментов исследования социально-экономических объектов.

Развитие математического направления в экономической науке повлекло усиленное развитие некоторых классических областей математики, прежде всего, нелинейного анализа и экстремальных задач. При этом также возникли новые дисциплины для изучения целенаправленных регулируемых или саморегулируемых объектов — теория игр и теория принятия решений (исследования операций), а также принципиально новые инструменты математического моделирования таких объектов, не встречающихся в природе и технических си-

[1] Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ, проект № 12-01-97029.

стемах, — функции полезности и производственные функции.

Успехи математизации экономики в понимании основ рационального поведения экономических агентов, ценообразования, решения практических задач планирования, анализа фирм и рынков, регулирования макроэкономических процессов несомненны. Однако ввиду особой сложности социально-экономических объектов эти успехи до настоящего времени существенно скромнее, чем в естествознании и технике. Абстракция представления социально-экономических объектов, естественная для научного подхода, в данном случае иногда оказывается настолько чрезмерной, что порождает неэффективные и ошибочные теории. Особенно ярко это проявилось в базовой экономической науке — теории потребительского спроса, построенной Вальрасом как теория индивидуального потребителя, действующего на рынке независимо от других потребителей. Попытка описать на основе этой математической теории рыночный спрос (объект практической экономики и теории экономического равновесия) привела к известным парадоксам агрегирования покупателей В. Гормана (W. Gorman, 1953) и Х. Зонненшейна (H. Sonnenschein, 1971) [35, Chs. 4, 17][1]. Только недавно было предложено устранение этих парадоксов на основе концепции статистического ансамбля потребителей как исходного объекта теории и математического моделирования [7-11, 13].

Вторая базовая экономическая наука — математическая теория производства — построена удачнее. Здесь имеются конструктивные разделы межотраслевого анализа и производственных функций (ПФ). Впервые метод ПФ как метод количественного экономического анализа был представлен в работе американских исследователей — экономиста П. Дугласа и математика Д. Кобба — в 1928 г. [30]. Кобб и Дуглас проанализировали влияние величин индексов затрачиваемого капитала и труда на индекс объема выпускаемой продукции в обрабатывающей промышленности (manufacturing) США на временном периоде 1899–1922 гг. Экономика США относится к классическому либерально-рыночному типу, и ПФ, построенная Коббом, представляет собой агрегированную макроэкономическую модель крупного сектора этой экономики. Соответственно, экономический анализ, выполненный Дугласом на основе функции Кобба, имел в то время в основном научно-познавательное значение. И лишь после Великой депрессии мировой капиталистической системы метод ПФ получил признание в широких кругах зарубежных экономистов и некоторых (образованных) политиков как инструмент планирования крупных фирм и индикативного планирования рыночной системы [33].

Очевидно, метод ПФ мог бы более эффективно использоваться в новой плановой экономике СССР и других социалистических стран, чем в рыночных системах. Сложность проблем государственного планирования существенно превосходила сложность задач микроэкономического планирования капиталистических фирм, но управляемость плановой системы была существенно выше, чем рыночной системы. Это позволяло гораздо эффективнее решать стратегические социально-экономические проблемы даже без научного обеспечения, адекватного их сложности. К сожалению, использованию новых методов экономического анализа, в том числе методов ПФ и линейного программирования (Л.В. Канторович, 1939), противодействовал ряд советских экономистов-догматиков, подготовленных для решения задач социально-экономического планирования на нормативной основе простыми калькуляционными методами. Они в большинстве своем были неспособны адекватно воспринимать новые экономические идеи и математические методы решения задач экономического анализа и планирования, и, ошибочно или с конкурентной целью, противопоставили плановую и рыночную системы на идеологическом уровне. Новые методы неоклассического анализа потребительского спроса и производства отвергались как «противоречащие теории трудовой стоимости», несмотря на их очевидную эффективность как методов экономического анализа, не зависящих от институциональных особенностей плановой и рыночной экономик. После ослабления позиций малограмотных догматиков, в последние три десятилетия существования социалистической системы метод ПФ получил в СССР развитие и сыграл положительную роль в решении задач государственного планирования [18, 23, 26]. Этот метод продолжает развиваться и в новых российских условиях, отличающихся деиндустриализацией и переходом на торгово-сырьевую экономику [2, 14, 15, 20].

[1] Основной результат Зонненшейна был обобщен (R. Mantel, 1974; G. Debreu, 1974) и теоремой о невозможности агрегирования покупателей, которая обычно называется ЗМД-теоремой (http://en.wikipedia.org/wiki/Sonnenschein-Mantel-Debreu_Theorem дата обращения: 30.08.2013).

Однако метод производственных функций и близкий ему по концепции метод функций полезности (ФП, в теории спроса) до настоящего времени спорадически подвергаются критике различного уровня как концептуальной, отвергающей эти функции принципиально, так и менее радикальной технической критике. Последняя накладывает на структуру этих новых математических моделей сложных целенаправленных объектов избыточные требования относительно размерностей их компонент, разрушающие методы ПФ и ФП.

В зарубежной литературе систематическая критика математического метода в экономике исходит от представителей либертарианской австрийской школы. Мы рассмотрим аргументы против производственных функций представителя этой школы профессора В. Барнета Второго [28][1]. Также будут рассмотрены претензии к методам ПФ и ФП отечественных авторов работ [2, 6, 17, 23], из которых две последние напечатаны в недавних выпусках Журнала экономической теории[2]. Эти авторы упрекают экономистов, использующих методы ПФ и ФП, в не учете требований размерностей и, как следствие, в бессмысленности таких функций в абсолютной форме, т. е. функций от аргументов, имеющих стоимостные или натуральные измерения.

В данной статье мы обсуждаем «проблему размерностей» производственных функций. Размерностная проблема для ФП аналогична. В первом разделе приводятся основные свойства и экономические характеристики ПФ в абсолютной форме. Второй раздел представляет задачу метода наименьших квадратов (МНК) построения конкретных функций по статистической информации. Эта задача проясняет смысл производственной функции как инструмента аппроксимации таблично заданной зависимости с заданными свойствами. В третьем разделе приведено несколько параметрических классов ПФ и обсуждены претензии к их математической структуре с позиции теории размерностей. Четвертый раздел представляет безразмерную индексную форму ПФ, упрощающую вычислительную сторону задачи МНК и демонстрирующую непоследовательность размерностных претензий к структуре производственных функций в абсолютной форме. Пятый раздел предлагает уточненную концепцию производственных функций как псевдо черных ящиков.

1. Производственные функции и их характеристики

Понятие и метод производственных функций сформировались в основном во второй половине XIX в. у нескольких авторов (в том числе у К. Маркса). В основе была догадка (гипотеза), что при изучении достаточно крупных производственных объектов можно отвлечься от их внутренней технологической и организационной структуры и изучать непосредственно зависимость количества выпускаемой продукции от затрат производственных факторов. Развернутый аналитический обзор возникновения и развития метода ПФ дан в работе [36]. В этом обзоре критическая сторона этого метода представлена упоминанием работы Джоан Робинсон (1953) [39], в которой она высказывает сомнения относительно построения макроэкономических ПФ ввиду известных несовершенств макроэкономической оценки капитала.

В каждом современном словаре, монографии или учебнике, содержащем главы о производственных функциях, дается их определение в различных вариациях [12,18, 19, 26, 27], но в любом случае принимается постулат однозначного определения уровня выпуска по уровням рационально используемых факторов, учитываемых данной функцией. Ключевым в данном случае является предположение о рациональности, которое может толковаться различно. В учебном пособии под рациональностью понимается относительная рациональность, зависящая «от уровня принятия управленческих решений и квалификации персонала фирм, представляющих моделируемый объект» [12, с. 34-35].

Далее ограничимся двухфакторными ПФ, представляющими уровень выпуска Y в зависимости от уровней использования привлеченного в производственный процесс капитала K и затрачиваемого труда L:

$$Y = F(K, L). \tag{1.1}$$

---

[1] W. BarnettII, [сайт] URL: http://www.loyno.edu/~wbarnett/ (дата обращения: 30.08.2013).

[2] В статье профессора А. Г. Дмитриева и др. рассматривается в основном теория индивидуального потребительского спроса и, в частности, декларируется «неэффективность и бесперспективность порядковой теории для исследований потребительского рынка» [17, с. 112]. Эта позиция неверно приписывается также книге В. К. Горбунова [8]. Напротив, в этой книге представлена современная порядковая теория спроса, отнесенная к рыночному (совокупному) спросу, методы построения порядковых коллективных функций полезности, порождающих наблюдаемый рыночный спрос, а также методы экономико-теоретических индексов спроса, учитывающих потребительские предпочтения.

Такое представление будем также называть производственной функцией в абсолютной форме, отличая ее от индексной формы ПФ, которая является той же функцией $F(\cdot\,,\cdot)$, но от отношений показателей (Y, K, L) к их соответствующим базовым значениям (Y_0, K_0, L_0). Индексные ПФ рассматриваются в четвертом разделе.

В настоящее время общими аналитическими требованиями для производственных функций являются возрастание и квазивогнутость. Свойство квазивогнутости функции (1.1) означает выпуклость ее кривых постоянного уровня выпуска, т. е. изоквант функции $F(K, L)$ уровня Y. Это свойство обобщает свойство вогнутости, отражающее неоклассическое представление о невозрастании отдачи от масштаба.

Понятие отдачи от масштаба означает отношение темпа роста выпуска к темпу условного пропорционального роста затрат факторов. Это свойство просто демонстрируется для важного класса положительно однородных функций. Напомним, функция $F(K, L)$ называется положительно однородной степени μ, если выполняется тождество [12, 18]

$$F(rK,rL) = r^{\mu}F(K,L),\ \ \forall r > 0. \qquad (1.2)$$

Функция (1.2) степени $\mu = 1$, называется линейно однородной функцией. Это математическое свойство соответствует экономическому свойству постоянной отдачи от масштаба производства. Оно соответствовало представлениям о рациональности производства в первой половине XIX в. (теория вменения Дж. Кларка). В дальнейшем было выявлено, что реальные производственные объекты могут развиваться также в режимах убывающей или возрастающей отдачи от масштаба, что в случае однородности (1.2) соответствует степеням $\mu < 1$ или $\mu > 1$. Функции $F(K, L)$ с невозрастающей отдачей вогнутые, и функции с возрастающей отдачей — квазивогнутые.

Представление реального производства в виде (1.1) в предположении непрерывной дифференцируемости функции $F(K, L)$ позволяет вычислять средние производительности факторов $(Y/K,\ Y/L)$, предельные производительности факторов $\left(\partial F(K,L)/\partial K, \partial F(K,L)/\partial L\right)$, а также их отношения, называемые факторными эластичностями:

$$\varepsilon_K = \frac{\partial F(K,L)}{\partial K} : \frac{Y}{K} \equiv \frac{\partial \ln F(K,L)}{\partial \ln K},$$
$$\varepsilon_L = \frac{\partial F(K,L)}{\partial L} : \frac{Y}{L} \equiv \frac{\partial \ln F(K,L)}{\partial \ln K}. \qquad (1.3)$$

Рассмотрим эти формулы относительно размерностей. Размерности средних и предельных производительностей, очевидно, совпадают. Они равны отношениям размерностей выпуска $[Y]$ и размерностей соответствующих факторов $[K]$, $[L]$. Соответственно, факторные эластичности (1.3) являются безразмерными величинами, не зависящими от размерностей и масштабов основных переменных (Y, K, L), что соответствует замыслу А. Маршалла, который ввел ценовую эластичность потребительского спроса [21, Кн. III, гл. IV]. Эластичности (1.3) представлены в виде отношений предельных и средних производительностей и эквивалентных им отношений логарифмических производных $\partial \ln F\,(K, L)$, $\partial \ln K$, $\partial \ln L$. В этих формулах, используемых в учебниках и монографиях (например [12, 18, 26, 33]), функция логарифм $\ln(\cdot)$ применяется к величинам, имеющим содержательные размерности основных переменных $[Y]$, $[K]$, $[L]$. Авторы работ [6, 16] объявляют применение функции «логарифм», а также возведение в нецелую степень «именованных величин» (имеющих размерности) недопустимыми операциями. Аналогичный запрет на возведение в нецелую степень факторов производственных функций ввели В.А. Бессонов [2] и В. Барнет [28]. Однако эти запреты надуманны, так как математические операции над переменными величинами относятся к их числовым значениям, а не к содержательным понятиям, имеющим данные числовые меры.

При фиксированных размерностях никакой разницы между вычислениями по математически эквивалентным формулам нет, и никто из критиков логарифмирования не указывает на ошибочность конечных результатов применения этой промежуточной операции к именованным величинам в реально рецензируемой научной и педагогической литературе[1].

С другой стороны, «размерностно правильные» математические операции над числовыми выражениями и функциями, «не замечающие» их размерностей, могут быть бессмысленными в контексте содержательно неверных построений. Например, в качестве отчета о работе отрасли цветной металлургии можно составить сумму весов всех произведенных металлов. Это будет правильно с точки зрения теории размерностей, бессмысленно для оценки работы отрасли, но содержательно и полезно для перевозки продукции.

---

[1] Авторы [6, 17] почему-то считают эту безошибочность результатов «парадоксом размерностей».

В 1932 г. в работе Дж. Хикса и Р. Аллена [34] в теорию потребительского спроса, основанную на понятии кривых безразличия В. Парето, были введены две характеристики виртуального процесса замещения в потреблении некоторой пары благ: предельная норма замещения и эластичность замещения. Они были перенесены в теорию производственных функций, изокванты которых подобны кривым безразличия. При этом [12]:

— предельной нормой замещения (ПНЗ) труда капиталом в точке (K, L) называется отношение предельных производительностей труда и капитала

$$S_{LK}\left(K,L\right)=\frac{\partial F\left(K,L\right)}{\partial L}:\frac{\partial F\left(K,L\right)}{\partial K}; \qquad (1.4)$$

— эластичностью замещения труда капиталом называется величина

$$\sigma_{LK}\left(K,L\right)=\frac{d\left(K/L\right)}{K/L}:\frac{dS_{LK}}{S_{LK}}=\frac{d\ln\left(K/L\right)}{d\ln S_{LK}}, \quad (1.5)$$

вычисляемая при условии $F(K,L)=const$.

Здесь логарифмирование применено к выражениям фондовооруженности K/L и ПНЗ S_{LK}, размерности которых одинаковы и равны отношению размерностей $[K]/[L]$. Соответственно, эластичность замещения (1.5), как и факторные эластичности (1.3), — безразмерная характеристика производственной функции, не зависящая от масштабов и размерностей основных переменных (Y, K, L). В двухфакторном случае эластичности замещения не зависят от порядка замещения: $\sigma_{KL}=\sigma_{LK}\equiv\sigma$ [12, 18].

ПНЗ — это характеристика производственной функции первого порядка относительно ее производных. На языке процентов ПНЗ приближенно показывает, на сколько процентов следует увеличить использование одного из факторов при уменьшении использования другого фактора на 1%.

Эластичность замещения является характеристикой ПФ второго порядка, т. е. она зависит и от вторых производных этой функции. Это явно проявляется при раскрытии дифференциала dS_{LK} с учетом определения (1.4). На языке процентов эластичность замещения σ_{LK} приближенно показывает, на сколько процентов должна измениться фондовооруженность труда K/L при изменении ПНЗ S_{LK} на 1%. При достаточно подробной статистике в окрестности некоторой точки (K_0, L_0) дифференциалы формулы (1.5) могут быть заменены разностями, и эластичность замещения будет таким способом приближенно оценена. Это обстоятельство важно для отбора подходящего класса ПФ.

Перечисленные явные характеристики ПФ могут вычисляться и анализироваться при произвольных комбинациях производственных факторов в экономической области, где эти характеристики соответствуют требованиям рациональности. Однако потенциал метода ПФ не ограничивается их явным анализом. Эти функции используются как субмодели в более сложных структурных моделях рыночного поведения фирм, отраслей и стран. Стационарные ПФ, рассматриваемые в данной статье, используются в моделях максимизации прибыли и минимизации издержек [12, 26, 27, 35]. Соответствующие задачи определяют функции факторного спроса и предложения на рынках производственных факторов, а также функции прибыли и издержек. Эти функции являются неявными характеристиками производственных функций. Они могут оцениваться независимо и использоваться для отбора наиболее подходящей ПФ.

2. Построение производственных функций как аппроксимация табличных зависимостей

Для обсуждения проблемы размерностей ПФ различных классов ведем в их общую запись вектор параметров $w=\left(w_1,\ldots,w_m\right)$:

$$Y=F(K,L;w). \qquad (2.1)$$

Это также нужно для изложения многоэтапного метода построения ПФ реальных объектов в различных классах [12, 14, 15, 20] и уточнения их смысла как инструмента аппроксимации. Допустимые значения параметров в общем случае могут зависеть от независимых переменных (факторов): $w\in W(K,L)\subseteq R^m$.

Вопрос о размерностях используемых переменных и параметров в допустимых классах функций $F(K, L; w)$ не ставился теоретиками «доприкладного» периода, но с современной точки зрения, обогащенной значительным опытом [25, 17, 12, 13], он ясен. Методика построения и размерности агрегированных экономических показателей (Y, K, L) определяются органами статистики. Они не влияют на изложение теоретических вопросов, но влияют на параметры конкретной ПФ, построенной по соответствующей статистической базе. В двухфакторном случае — это тройной временной ряд значений (Y, K, L) в моменты отчетности t:

$$\left\{Y_t, K_t, L_t:\ t=\overline{0,T}\right\}. \qquad (2.2)$$

Цель построения ПФ (2.1) реального объекта, представленного статистикой (2.2), — это аппроксимация функциональной зависимости между выделенными показателями объекта в ограниченной области их ожидаемых значений. Экономисты-исследователи реальных производств не могут забывать или игнорировать размерности статистических показателей. Как правило, показатели выпуска и используемых фондов в каждый период (Y_t, K_t) представляются их стоимостью, а затраты труда L_t могут измеряться стоимостью, численностью занятых, или рабочим временем. Для разных сочетаний размерностей будут определяться разные значения параметров определяемых функций $F(K,L;w)$.

Масштаб представления чисел (2.2) можно менять на этапе формирования исходных данных, и это повлияет на параметры определяемой функции, но в дальнейшем масштаб и размерности фиксируются, чтобы обеспечить свободное использование математических преобразований в ходе построения ПФ и их анализ как обычных математических (абстрактных) функций. Часть параметров ПФ может иметь некоторую содержательную интерпретацию и соответствующую размерность, но функция (2.1) может также иметь чисто «подгоночные параметры», обеспечивающие достижение хорошего качества аппроксимации соответствующих значений табличной зависимости (2.2). Приписывать таким техническим параметрам какой-либо другой смысл не требуется.

Соответствие функции (2.1) некоторого параметрического класса статистике (2.2) устанавливается степенью удовлетворения условий интерполяции

$$Y_t = F(K_t, L_t; w),\ \ t = \overline{0,T}. \qquad (2.3)$$

Эти условия, как правило, не могут быть удовлетворены в совокупности, так как модель достаточно сложного объекта является его упрощением, и агрегированные данные (2.2) содержат как случайные погрешности, так и неустранимые ошибки агрегации экономических данных.

Задачу построения ПФ по статистическим данным принято относить к регрессионному анализу [5, 16]. При этом вместо несовместной системы (2.3) рассматривается нелинейное уравнение множественной регрессии, аддитивное относительно случайных погрешностей ε_t:

$$Y_t = F(K_t, L_t; w) + \varepsilon_t,\ \ t = \overline{0,T}. \qquad (2.4)$$

Основной метод его решения (оценки параметров ПФ) — это метод наименьших квадратов (МНК), согласно которому оценки параметров *w* определяются из условия минимума взвешенного функционала квадратичной невязки системы условий (2.3):

$$\varphi(w) = \frac{1}{T+1}\sum_{t=0}^{T}\left[\frac{Y_t - F(K_t, L_t; w)}{Y_t}\right]^2 \to \min_{W(K,L)}. \qquad (2.5)$$

Функционал (2.5) позволяет сравнивать варианты с различными длинами T временных рядов и различными масштабами измерений.

При выполнении ряда предпосылок регрессионного анализа (линейность регрессионного уравнения (2.4) относительно параметров, нормальность распределения случайной величины ε с нулевым средним, постоянная дисперсия и некоррелированность реализаций $\{\varepsilon_t\}$ [5, тема 2]) МНК-оценки параметров, определяемые задачей, являются наилучшими по показателям несмещенности, состоятельности и эффективности. Эти характеристики имеют асимптотический характер. Последнее предполагает существенное превышение количества наблюдений T над числом оцениваемых параметров. Эти предпосылки в общем случае не могут быть обоснованы и обеспечены (временные ряды для построения стационарных ПФ не должны быть длинными), поэтому ограничение проблемы построения ПФ рамками регрессионного анализа эквивалентно переводу ее в класс эвристик, не имеющих значимых обоснований. Однако эта задача, в отличие от стандартной регрессии, имеет содержательную теорию, кратко изложенную выше, и ее следует рассматривать как аппроксимацию функциональной зависимости (2.2) обобщенным методом наименьших квадратов. Этот метод заключается в минимизации невязки аппроксимации (2.5) в различных параметрических классах ПФ с основным критерием качества аппроксимации $\varphi(w)$ и, возможно, с дополнительными статистическими критериями качества, если число измерений $T + 1$ не очень малое [12, 14, 15, 20].

3. Некоторые классы производственных функций и проблема размерностей

Первая математическая модель производства (1.1), не потерявшая своего значения до настоящего времени, была предложена, видимо, шведским экономистом К. Викселлем (Knut Wicksell) в начале XX в. [36, с. 4]:

$$Y = AK^{\alpha}L^{1-\alpha},\ \ A > 0,\ \ 0 < \alpha < 1. \qquad (3.1)$$

Эта функция при данных ограничениях на параметры строго возрастающая, вогнутая и линейно однородная (постоянная отдача от масштаба).

Функция (3.1) была использована (в индексной форме, рассматриваемой ниже) П. Дугласом и Д. Коббом для анализа обрабатывающей промышленности США [30]. Позже для учета возможностей убывания и возрастания отдачи от масштаба, двухпараметрический класс функций (3.1) был заменен более общим трехпараметрическим классом степенных мультипликативных функций, называемых по установившейся традиции функциями Кобба — Дугласа (КД):

$$Y = AK^{\alpha}L^{\beta}, \quad A, \alpha, \beta > 0. \qquad (3.2.)$$

Функции (3.2) положительно однородные степени $\mu = \alpha + \beta$. Известно, и в этом легко убедиться, что их факторные эластичности (1.3) совпадают со степенями:

$$\varepsilon_K = \alpha, \quad \varepsilon_L = \beta. \qquad (3.3)$$

Степень однородности μ представляет эластичность производства по масштабу [12, 18]. Она равна сумме факторных эластичностей (3.3), каждая из которых обычно не превосходит единицы [26, с. 113; 2, с. 86], соответственно, $0 < \mu < 2$.

Немногим сложнее проверить, что эластичность замещения здесь одинаковая для всех параметров и равна единице: $\sigma = 1$.

Класс ПФ (3.2) является наиболее используемым в литературе, несмотря на свою простоту относительно приведенных содержательных характеристик, и, в то же время, благодаря этой простоте. Функция (3.2) является базовой моделью производственных функций. С нее полезно начинать, как показано ниже, построение ПФ более гибких и, следовательно, более адекватных реальности. И этот класс функций является основным полигоном борьбы за собственно метод производственных функций. Мы ограничимся здесь размерностными претензиями к структуре этих функций.

В силу равенств (3.3) и безразмерности эластичностей (1.3) степенные параметры α и β являются безразмерными величинами. О размерности параметра A сказать что-либо убедительное трудно, как и о размерностях термов формулы (3.2) K^{α} и L^{β} с произвольными степенями α и β, обычно принимающими для реальных объектов (МНК-оценки) дробные значения из интервала (0.0, 1.0).

Выше отмечено, что авторы современных работ [2, 6, 17, 28] считают недопустимым применять возведение в дробную степень «именованных» (размерных) величин. При этом критики обычно апеллируют к формулам, представляющим физические законы. С этим можно бы согласиться, если бы результат такой операции, например, $K\alpha$ предъявлялся для конечного использования. Но ПФ по своему смыслу является цельным представлением производственного объекта.

К такому выводу пришли Р. Л. Раяцкас и М.К. Плакунов в книге 1987 г. [24], оппонируя более раннее (1976) и радикальное неприятие функции (3.2) со стороны Л. Сатуновского[1]. Отклоняя претензию Сатуновского к фрагментам функции Кобба — Дугласа, Раяцкас и Плакунов приняли позицию целостного рассмотрения «числовых утверждений», т. е. формул: «Следует оценивать осмысленность числового утверждения в целом, а не по частям» [24, с. 85]. Однако они в своей аргументации привлекли эвристическую теорию размерностей, выработанную в технических науках, и сочли, что нужно ввести условные размерности для величин K^{α} и L^{β}, и через них — некую размерность параметра A, обеспечивающую естественную размерность всей функции, т. е. выпуска Y. Но такие размерности, в отличие от «работающих» размерностей физических формул, были бы действительно бессмысленными. Размерности фрагментов ПФ никак не проявляются в содержательном анализе производственных функций на основе приведенных выше экономических характеристик.

Профессор Барнет [28], помимо неприятия операции возведения в произвольную степень количеств капитала и труда, считает также недопустимым непостоянство параметров функций (3.2), соответствующих различным объектам. Он апеллирует как к образцу математического моделирования к закону всемирного тяготения (И. Ньютон), который утверждает, что сила гравитации F между телами с массами m_1 и m_2, и расстоянием между их центрами масс d равна

$$F = \gamma \frac{m_1 m_2}{d^2}. \qquad (3.4)$$

Здесь γ — гравитационная константа, универсальная для Вселенной и определенная экспериментально. В единицах СИ ее значение составляет приблизительно $6{,}67 \times 10^{-11}$ м^3/ (кг · с^2). Барнет требует [28, с. 96] подобной определенности и целых степеней в формулах,

[1] Сатуновский Л. По поводу производственной функции Кобба — Дугласа (Плановое хозяйство, 1976, №1).

представляющих экономические модели, и объявляет модели, подобные функции Кобба — Дугласа «бессмысленными или экономически необоснованными» *(meaningless or economically unreasonable)*.

Некорректность сопоставления Барнетом модели ПФ с законами естествознания отмечается в оппонирующей ему работе R. Folsom и R. Gonzales [31] в том же «Quarterly Journal of Austrian Economics». Эти авторы указывают на принципиальное отличие формулы Ньютона (3.4) от формулы производственной функции (3.2). Закон Ньютона содержит число (степень) 2 и величину γ не в качестве параметров, меняющихся при различных применениях формулы (3.2) к различным объектам (системам двух тел масс m_1 и m_2, с расстоянием между их центрами масс d), а в качестве универсальных констант. Можно добавить, что формулы законов естествознания являются универсальными истинами, установленными в рамках принципов соответствующей науки, принятых научным сообществом в данное время, а убедительно построенные производственные функции являются частными истинами — об искусственных объектах.

Рассмотрим некоторые более сложные классы ПФ в абсолютной форме. Первым обобщением функции КД стала функция постоянной эластичности замещения (ПЭЗ), введенная и исследованная в работе К. Эрроу и др. [29]:

$$Y = A\left(\nu K^{-\rho} + \left(1-\nu\right)L^{-\rho}\right)^{-\mu/\rho}. \qquad (3.5)$$

Ограничения на параметры этой функции: $(A,\mu) > 0, -1 \le \rho \ne 0, 0 < \nu < 1.$ Эта функция, известная в математической статистике как «степенная средняя», при данных ограничениях является возрастающей, квазивыпуклой и однородной степени μ.

Функция (3.5) была выведена в [29] из формул — определений ПНЗ (1.4) и эластичности замещения (1.5), где величина σ задавалась как параметр, принимающий произвольные положительные значения, кроме $\sigma = 1$. Это объясняет содержательное название ПЭЗ этой функции. Ее эластичность замещения определяется параметром ρ:

$$\sigma = \frac{1}{1+\rho}. \qquad (3.6)$$

Из равенства (3.6) следует безразмерность параметра ρ и его неявный содержательный смысл. Экономический смысл также имеет степень однородности функции (3.5) μ, представляющая эластичность производства по масштабу. Как эластичность параметр μ также безразмерен. Оба параметра (ρ, μ), определяющие эластичности функции ПЭЗ, не зависят от масштабов и размерностей основных переменных (Y, K, L).

Параметры (A, ν) функции ПЭЗ являются техническими, обеспечивающими вместе с параметрами эластичностей (ρ, μ) требуемые качественные и аппроксимационные свойства этой функции относительно моделируемого объекта. Параметр A можно назвать масштабом, а параметр ν — весом вклада капитальных затрат, соответственно, выражение $(1 - \nu)$ — весом вклада трудовых затрат. Если рассматривать вопрос об их размерности, то параметр v, очевидно, безразмерен, а относительно размерности параметра A достаточно сказать, что она такова, что правая часть равенства (3.5) имеет размерность его левой части. Большего для построения и применения конкретных ПФ не требуется.

Исключение в классе функций ПЭЗ значения параметра $\rho = 0$, соответственно, значения эластичности замещения $\sigma = 1$, говорит о том, что класс функций ПЭЗ не содержит функций КД. Однако известно (выражение 3.6 подсказывает), что любая функция КД (3.2) является пределом семейства функций ПЭЗ при $\rho \to 0$, причем параметры предельной функции определяются остальными (фиксированными) параметрами семейства [12, с.19]:

$$A, \alpha = \mu\nu, \beta = \mu(1 - \nu). \qquad (3.7)$$

Таким образом, класс функций ПЭЗ (3.5) является обобщением класса КД (3.2) в асимптотическом смысле. При этом все содержательные характеристики, порождаемые любой функцией КД, будут с любой точностью приближены соответствующими характеристиками некоторой функции ПЭЗ при достаточно малом (по абсолютной величине) параметре ρ.

Введение нового класса производственных функции существенно повысило адекватность и гибкость метода ПФ. Однако в книге Плакунова и Раяцкаса 1984 г. [23, с. 152-154], в которой функция КД в абсолютной форме (3.2) считалась допустимой, более гибкая функция ПЭЗ признавалась допустимой лишь в индексной форме, рассматриваемой в следующем разделе. Эти авторы «препарировали» формулу (3.5) и объявили ее часть $\nu K^{-\rho} + \left(1-\nu\right)L^{-\rho}$ бессмысленной как сумму разнотипных переменных. Но отрицание функции ПЭЗ не согласуется с признанием функции КД в силу свойства предельности класса КД для класса ПЭЗ. Действительно, с точки зрения математического моделирования все достаточно близкие и допустимые аппроксимации статистической зависимости, постулированной на основе опыта, эквивалентны. Можно предположить, что позже, в соответствии с признанным ими принципом целостности числовых утверждений (в книге 1987 г. [24]), их позиция изменилась.

Свойство постоянства эластичности замещения, очевидно, также ограничивает область применения производственных функций. Это ограничение давно преодолено специалистами метода ПФ. Первым преодолением постоянства эластичности замещения с сохранением свойства однородности была функция Реванкара [37], для которой эта характеристика зависела линейно от фондовооруженности. Соответствующая функция была названа функцией переменной эластичности замещения. Ее удобно представить в эквивалентном виде (отличном отпредставления Реванкара):

$$Y = AK^{\alpha}(L + \nu K)^{\beta}, \tag{3.8}$$

с явными ограничениями на параметры $(A, \alpha, \beta) > 0$ и неявным — на параметр ν, через смешанное ограничение $L + \nu K \geq 0$, или $\nu \geq -L/K$.

Функция (3.8) возрастающая, квазивогнутая и однородная степени $\mu = \alpha + \beta$. При $\nu = 0$ она становится функцией КД. Таким образом, класс функций (3.8) также является обобщением класса КД.

Нетрудно вывести формулу эластичности замещения функций (3.8). Эта величина зависит от фондовооруженности $k = K/L$ линейно:

$$\sigma(k) = 1 + \frac{\mu\nu}{\alpha}k.$$

По этой причине название функции (3.8) целесообразно уточнить как функция линейной эластичности замещения (ЛЭЗ). Новый класс еще больше расширяет возможности метода ПФ, несмотря на «нарушение», с точки зрения названных критиков, требований теории размерностей.

Список усложняющихся классов ПФ, «нарушающих» размерностные требования, но позволяющих принципиально охватывать более сложные объекты, можно продолжить (см. [12, 15, 18, 33, 36]). Ограничимся здесь одним простым примером уже неоднородной функции, известной в теории потребительского спроса как функция Джири [32]

$$F(K, L) = A(K - \gamma)^{\alpha}(L - \delta)^{\beta}, (A, \alpha, \beta) > 0. \tag{3.9}$$

Эта функция, как и функции ПЭЗ и ЛЭЗ, является обобщением функции КД и совпадает с последней при $\gamma = \delta = 0$.

Функции полезности Джири порождают простые, гибкие и удобные для статистических оценок функции спроса, называемые «линейными системами расходов» [38]. Эти функции часто используются в западных работах по реальному анализу потребительских рынков.

Более сложный класс функций не означает более подходящий для данной статистики (2.2) класс. С ростом сложности структуры ПФ возрастает вычислительная сложность задачи МНК-оценивания параметров и ухудшается ее обусловленность (устойчивость решений). Эта тема заслуживает специального рассмотрения. Здесь лишь отметим, что наличие последовательности усложняющихся классов ПФ, где первый класс Кобба — Дугласа, а каждый последующий является обобщением одного из предыдущих, позволяет эффективно реализовать соответствующую последовательность задач МНК с формированием начальных приближений (основная проблема нелинейного МНК [16]) по результатам предыдущего оценивания.

Первая задача МНК в классе функций КД упрощается логарифмированием системы (2.3) для функции (3.2):

$$\alpha \ln K_t + \beta \ln L_t + \gamma = \ln Y_t, \quad t = \overline{0, T}, \tag{3.10}$$

где $\gamma = \ln A$. Задача МНК для этой переопределенной системы линейных уравнений относительно параметров (α, β, γ) ν сводится к системе трех линейных уравнений, имеющей единственное решение (см., например [12, с. 64]). Вопреки надуманным запретам логарифмирования «именованных величин», этот простой прием линеаризации нелинейной задачи оценивания параметров функций КД (3.2) существенно ее упрощает.

Таким образом, получив оценки параметров функции КД $(\hat{A}, \hat{\alpha}, \hat{\beta})$, можно перейти к задаче построения более сложной функции ПЭЗ (3.8), выбрав в качестве разумного начального приближения параметры

$$A^0 = \hat{A}, \mu^0 = \hat{\alpha} + \hat{\beta}, \nu^0 = \frac{\hat{\alpha}}{\mu^0}, \rho^0 = \varepsilon.$$

Первые три равенства следуют из формул (3.7) и ε — малое (по модулю) число.

Аналогичные формулы передачи полученных оценок параметров для формирования начальных приближений параметров следующего класса нетрудно вывести и для других классов ПФ. Описанная схема решения задач построения ПФ в последовательно усложняющихся классах предложена и апробирована в работах [4, 15, 20].

4. Индексная форма ПФ и «проблема размерностей»

4.1. Согласно позиции авторов [2, 6, 23], нелинейные производственные функции в абсолютной форме нелегитимны с точки зрения теории размерностей, но для экономического анализа могут использоваться их индексные формы. Покажем непоследовательность и ограниченность такой позиции.

Под индексной формой ПФ понимается функциональная связь, аналогичная функции в абсолютной форме (2.1), между элементарными индексами основных показателей (Y, K, L) относительно их значений в некоторый базовый период (Y_0, K_0, L_0):

$$\upsilon = \frac{Y}{Y_0}, \kappa = \frac{K}{K_0}, \lambda = \frac{L}{L_0}. \qquad (4.1)$$

Элементарные индексы представляют темпы роста соответствующих показателей относительно базового периода. При переходе к индексам (4.1) статистические данные (2.2) переходят в набор статистических индексов

$$\left\{\upsilon_t, \kappa_t, \lambda_t : t = \overline{0,T}\right\}, \qquad (4.2)$$

где $\upsilon_0 = \kappa_0 = \lambda_0 = 1$, и функции (2.1) становятся индексными ПФ

$$\upsilon = F(\kappa, \lambda; \omega). \qquad (4.3)$$

Вектор параметров ω любой индексной функции (4.3) имеет ту же (математическую) размерность, что и вектор w функции $F(K, L; w)$, но преобразование переменных (4.1) в общем случае меняет значения параметров, отличных от эластичностей. Для любой индексной функции (4.3) имеет место равенство, получаемое подстановкой значений переменных $\upsilon_0 = \kappa_0 = \lambda_0 = 1$:

$$1 = F(1,1;\omega). \qquad (4.4)$$

Задача МНК в индексной форме, т. е. оценивание параметров ω функции (4.3) по данным (4.2), принимает вид

$$\psi(\omega) = \frac{1}{T+1}\sum_{t=0}^{T}\left[1 - \frac{F(\kappa_t, \lambda_t; \omega)}{\upsilon_t}\right]^2 \to \min_{W}. \qquad (4.5)$$

Индексная форма ПФ менее информативна, чем абсолютная форма, так как не позволяет вычислять характеристики производства, зависящие от абсолютных значений количеств используемых производственных факторов (K, L) или от фондовооруженности $k = K/L$. Однако индексная форма ПФ может оказаться вынужденной, если исходная информация известна только (или частично) в индексных показателях (4.2). Рассмотрим эту ситуацию на примере пионерской работы Кобба и Дугласа [30].

Собранная Дугласом статистика обрабатывающей промышленности США на временном периоде 1899–1922 гг. состояла из временных рядов: количество накопленного капитала K_t, среднегодовые численности работников отрасли L_t (тысячи человек) и индексы количеств произведенной в год t продукции Y_t относительно неизвестного (в статье) начального уровня Y_0, т. е. индексы уровня производства υ_t. Кобб выбрал в качестве модели исследуемого объекта индексную ПФ

$$\upsilon = a\kappa^{\alpha}\lambda^{1-\alpha}, a > 0, 0 < \alpha < 1. \qquad (4.6)$$

Им были получены МНК-оценки параметров, представленные в формуле построенной функции

$$\upsilon = 1{,}01\kappa^{1/4}\lambda^{3/4}. \qquad (4.7)$$

Что дает анализ индексной функции в форме (4.6)? Параметр а здесь уже не отражает масштаба производства. Его идеальное значение в отсутствие ошибок данных и модели в силу равенства (4.4) должно быть единицей. Соответственно, отличие представленной формулой (4.7) оценки $\hat{a} = 1{,}01$ от единицы, т. е. величина 0,01, является компонентой МНК-невязок соответствующей регрессионной системы. Единственным нетривиальным результатом построения функции (4.7) для исследуемого объекта являются оценки факторных эластичностей труда и капитала (1.3) в данном секторе, полученные при весьма упрощающих предположениях Кобба и Дугласа:

$$\varepsilon_K = \hat{\alpha} = \frac{1}{4}, \quad \varepsilon_L = 1 - \hat{\alpha} = \frac{3}{4}.$$

Для индексных данных (4.2) имеет смысл также построить индексную функцию ПЭЗ

$$Y = a\left(\nu\kappa^{-\rho} + (1-\nu)\lambda^{-\rho}\right)^{-\mu/\rho},$$

$$(a, \mu) > 0, -1 \le \rho \ne 0, \ 0 < \nu < 1. \qquad (4.8)$$

Параметры μ и ρ этой функции определяют, соответственно, эластичность производства и эластичность замещения $\sigma = 1/(1 + \rho)$.

Функция (4.8), построенная по данным [30][1], имеет оценки параметров и эластичности замещения

$$\hat{a} = 1{,}0302, \hat{\nu} = 0{,}2446, \hat{\mu} = 0{,}9710,$$

$$\hat{\rho} = -0{,}2478, \hat{\sigma} = 1{,}33.$$

Оценка эластичности производства $\hat{\mu} = 0{,}97$ говорит об убывающей отдаче относительно масштаба данного сектора экономики США на периоде ее наблюдения. В отличие от функции КД, функция ПЭЗ не представляет факторных эластичностей, но уточняет значение эластичности замещения.

Более содержательные классы ПФ в индексной форме строить без известных значений (Y_0, K_0, L_0), позволяющих восстанавливать абсолютные данные, не имеет смысла. В этом случае отсутствует возможность сопоставления их относительных аргументов (κ, λ) с произвольными точками пространства факторов (K, L) и вычисления в этих точках содержательных экономических показателей, в том числе уточнения эластичностей, грубо оцениваемых функциями КД и ПЭЗ.

4.2. Несмотря на описанную ограниченность индексных ПФ, не имеющих содержательных размерностей, критики настаивают на их исключительном использовании, чтобы удовлетворить претензии со стороны «размерностной теории». Надуманность этих претензий к абсолютным ПФ аргументирована выше, и эту позицию можно игнорировать. Однако имеется веская причина использовать индексные ПФ при наличии полной статистической информации (2.2), причем во всех классах. Эта причина — вычислительная сложность задачи МНК в абсолютной форме (2.5) для классов ПФ, более сложных, чем КД.

Структура функционала $\varphi(w)$ задачи (2.5) зависит от соотношения характерных величин независимых переменных (K, L) функции $F(K, L; w)$. В общем случае числовые порядки переменных в статистической отчетности различаются, и это приводит к «овражной» структуре целевой функции $\varphi(w)$ в пространстве параметров. Это затрудняет поиск минимума численными методами, если не выявлено достаточно хорошего приближения точки минимума.

Индексная задача (4.5), как правило, в вычислительном отношении существенно проще аналогичной задачи (2.5) для ПФ в абсолютной форме, так как индексные переменные $(\upsilon, \kappa, \lambda)$, в отличие от абсолютных переменных (Y, K, L), имеют значения порядка единицы. Это, как правило, устраняет или существенно уменьшает «овражный» эффект функционала $\psi(\omega)$, и численное решение задачи (4.5) упрощается. Абсолютная форма ПФ $F(K, L; w)$ просто восстанавливается по индексной функции $F(\kappa, \lambda; \omega)$. Покажем это, установив связи параметров w и ω обеих форм.

Подставим переменные (4.1) в равенство (4.3) и, используя абсолютное представление $Y = F(K, L; w)$, получим функциональное тождество:

$$F(K, L; w) = Y_0 F\left(\frac{K}{K_0}, \frac{L}{L_0}; \omega\right). \qquad (4.9)$$

Тождество (4.9) демонстрирует эквивалентность абсолютной и индексной форм производственных функций при наличии информации о базисных значениях содержательных переменных (Y_0, K_0, L_0). Связь параметров w и ω устанавливается структурным анализом этого тождества для конкретных функций F. Сделаем это для приведенных выше классов функций.

Рассмотрим тождество (4.9) для функции КД (3.2). Здесь $w = (A, \alpha, \beta)$ и параметры индексной формы этой функции обозначим $\omega = (a, \alpha', \beta')$:

$$\upsilon = a\kappa^{\alpha'}\lambda^{\beta'}, \quad a > 0, \quad 0 < \alpha', \beta' < 1. \qquad (4.10)$$

Равенство (4.9) в этом случае с учетом связи индексных и абсолютных переменных (4.1) принимает вид

$$AK^{\alpha}L^{\beta} = Y_0 a \left(\frac{K}{K_0}\right)^{\alpha'} \left(\frac{L}{L_0}\right)^{\beta'} = \frac{Y_0 a}{K_0^{\alpha'} L_0^{\beta'}} K^{\alpha'} L^{\beta'}.$$

В силу произвольности переменных (K, L) из этого следуют равенства соответствующих степеней термов $K^{\alpha}L^{\beta}$ (слева) и $K^{\alpha'}L^{\beta'}$ (справа), а также коэффициентов перед ними:

$$\alpha = \alpha', \beta = \beta', A = \frac{Y_0 a}{K_0^{\alpha} L_0^{\beta}}. \qquad (4.11)$$

Таким образом, построив индексную функцию КД (4.10), мы также получаем параметры (4.11) абсолютной функции КД (3.2)[2].

Функции ПЭЗ в абсолютной форме (3.2) соответствует индексная функция

$$\upsilon = a\left(\nu'\kappa^{-\rho} + (1-\nu')\lambda^{-\rho}\right)^{-\mu/\rho}. \qquad (4.12)$$

Действуя аналогично функции КД, нетрудно получить связи параметров в этом и остальных классах ПФ. Различающиеся параметры функций (3.5) и (4.12) связаны соотношениями

[1] Построена в дипломной работе А. В. Ярмуллина «Однородные функции в экономическом моделировании» (УлГУ, кафедра ЭММИТ, 2013).

[2] Связь параметров индексной и абсолютной форм функции КД приведена в [24, гл. 5].

$$A = \frac{Y_0 a}{\left(\nu' K_0^{\rho} + \left(1-\nu'\right) L_0^{\rho}\right)^{\mu/\rho}},$$

$$\nu = \frac{\nu' K_0^{\rho}}{\nu' K_0^{\rho} + \left(1-\nu'\right) L_0^{\rho}}.$$

Функции ЛЭЗ в абсолютной форме (3.8) соответствует индексная функция

$$\upsilon = a\kappa^{\alpha}\left(\lambda + \nu'\kappa\right)^{\beta}. \qquad (4.13)$$

Различающиеся параметры функций (3.8) и (4.13) связаны соотношениями

$$A = \frac{Y_0 a}{K_0^{\alpha} L_0^{\beta}}, \nu = \frac{L_0}{K_0}\nu'.$$

Функции Джири в абсолютной форме (3.9) соответствует индексная функция

$$\upsilon = a\left(\kappa - \gamma'\right)^{\alpha}\left(\lambda - \delta'\right)^{\beta}. \qquad (4.14)$$

Различающиеся параметры функций (3.9) и (4.14) связаны соотношениями

$$A = \frac{Y_0 a}{K_0^{\alpha} L_0^{\beta}}, \gamma = K_0\gamma', \delta = L_0\delta'.$$

Таким образом, построив индексную функцию в любом из рассмотренных и других параметрических классов, мы также получаем параметры эквивалентной функции в абсолютной форме. Это расширяет технические возможности построения производственных функций сложных классов и, соответственно, возможность более полного экономического анализа объекта, представленного производственной статистикой в абсолютной форме (2.2).

5. Производственная функция как псевдо черный ящик

В учебном пособии [12, с. 4], а также в [14, с. 95] производственные функции рассматриваются как «математические модели исследуемых объектов типа черного ящика». Доосмысление понятия ПФ, стимулированное непрекращающейся размерностной критикой этого продуктивного инструмента экономического анализа, привело автора к характеризации самой производственной функции как псевдо черного ящика. Поясним эту характеризацию.

Понятие «черный ящик» является одним из основных в кибернетике, понимаемой как наука об управлении сложными системами. При этом сложными или очень сложными [3] системами считаются объекты, детальная структура которых чрезмерно сложна или неизвестна исследователю и предполагается, что задачи исследования могут быть решены на основе анализа не самой системы, а некоторой ее модели, т. е. упрощенного информационного или математического представления. Такие системы во многих случаях можно рассматривать как «ящики» с неизвестным внутренним содержанием, но для которых можно наблюдать или задавать различные варианты «входных» управляющих характеристик и наблюдать «выходные» результаты. Эти объекты называются черными ящиками [3, гл. 6; 19, с. 391]. Сложные и очень сложные производственные объекты изучаются, в частности как черные ящики методом ПФ.

Проблема построения производственной функции для конкретного объекта — это экономико-математическая проблема. Она решается неоднозначно и требует хорошего владения как математическими методами, так и экономическими знаниями. Математическая сторона этой проблемы заключается в обеспечении аппроксимации таблично заданной статистической зависимости с заданными свойствами, существование которой постулируется на основе сложившихся научных представлений о рациональном производстве. Качество аппроксимации определяется как общим математическим подходом к проблеме аппроксимации, так и содержательными дополнительными характеристиками. Построенная математиком-экономистом или математиком и экономистом (например, Коббом и Дугласом) производственная функция является функциональной моделью сложного или очень сложного реального объекта. Такие модели-формулы работают как единое целое. Размерность формулы, представляющей построенную ПФ в абсолютной форме, по определению, совпадает с размерностью показателя выпуска. О размерности элементов формулы ПФ ставить вопрос не имеет смысла. Здесь должен обсуждаться конечный результат. Способ его достижения является компетенцией специалистов по экономико-математическому моделированию. Структура построенной экономистом-математиком производственной функции ему полностью известна и понятна. С другой стороны, для экономиста-аналитика, недостаточно владеющего методом математического моделирования, эта структура несущественна, и он может относиться к такой функции как к черному ящику, помогающему в содержательном исследовании. Разрешению этого несовпадения (математику известно и понятно, экономисту или другому нематематику известно, но непонятно), возможно, поможет характеризация производственных функций как псевдо черных ящиков.

Заключение

Возраст метода производственных функций, если его отсчитывать от работ Кнута Викселля, превосходит столетие. До начала 60-х гг. в качестве ПФ использовалась простая, но полезная для первых опытов функция Викселля, получившая имя ее первых пользователей Ч. Кобба и П. Дугласа[1]. После введения функции ПЭЗ [29] в зарубежной и советской экономико-математической литературе существенно возросло число публикаций по данной теме. Было предложено множество новых функций, более адекватных реальным объектам. Многие из новых классов были эффективно применены, как правило, в абсолютной форме (если исходная информация это позволяла) в реальном экономическом анализе.

Несмотря на немалый позитивный опыт, метод ПФ до настоящего времени спорадически подвергается в зарубежной и отечественной экономической литературе сомнениям и контрпродуктивной критике. Такие работы, несомненно, сдерживают развитие и распространение на практике этого эффективного метода количественного анализа и требуют ответа. В данной работе рассмотрены размерностные претензии к устройству производственных функций. Подводя итог, сделаем два замечания.

1. Математический анализ, используемый в моделировании экономических объектов, является теорией абстрактных числовых функций, и в приложениях, использующих содержательные величины и функции, он применяется к их числовым значениям безотносительно от того, мерами каких количеств они являются. Разумеется, осмысленность функциональных связей в целом и математическая корректность преобразований числовых величин, размерности которых математика не замечает, подразумеваются.

2. Продуктивное применение производственных функций и функций полезности в исследовании производства и потребления является искусством, основанным на научном знании и понимании специфики этих процессов коллективного поведения, а не «математическим шарлатанством», как считают авторы [6, с. 98]. Некомпетентное вмешательство в процесс математического моделирования целенаправленных объектов, не встречающихся в естественных и технических науках, подобно поведению героя известной сказки В. Одоевского [22] — мальчика Миши, решившего (хорошо, что во сне) навести порядок внутри непонятно и, как ему казалось, неправильно устроенной музыкальной табакерки.

Разумеется, из второго замечания не следует отрицания феномена «математического шарлатанства» в экономической науке. Выдающийся экономист-математик XX в. столетия Морис Алле (нобелевский лауреат 1988 г.), которого цитируют авторы [6], в очень нужной методологической работе «Современная экономическая наука и факты» под математическим шарлатанством понимал экономико-математические теории «чисто логического характера, не имеющие никакой реальной связи с фактами» [1, с. 13]. К методам производственных функций и коллективных (не индивидуальных) функций полезности, помогающим исследовать именно факты производства и рыночного спроса, это не относится.

[1] Большинство российских авторов, использующих метод ПФ, ограничивается этой функцией до настоящего времени.

Список источников

1. *Алле М.* Современная экономическая наука и факты // THESIS. — 1994. — Т. 2. — Вып. 4. — С. 11-19.
2. *Бессонов В. А.* В. Проблемы построения производственных функций в российской переходной экономике // Бессонов В. А., Цухло С. В. Анализ динамики российской переходной экономики. — М.: Институт экономики переходного периода, 2002. — С. 5-89.
3. *Бир С.* Кибернетика и менеджмент. — М.: КомКнига, 2011.
4. *Вальрас Л.* Элементы чистой политической экономии. — М.: Изограф, 2000.
5. *Воскобойников Ю. Е.* Регрессионный анализ данных в пакете Mathcad: учебное пособие. — СПб.: Лань, 2011.
6. *Герман Е. А., Дмитриев А. Г., Козелецкая Т. А.* О дополнительных возможностях экономико-математического моделирования // Журнал экономической теории. — 2012. — №1. — С. 98-105.
7. *Горбунов В. К.* К теории рыночного спроса. Регулярность и экономическое равновесие // Экономическая наука современной России. — 2013. — №4.
8. *Горбунов В. К.* Математическая модель потребительского спроса. Теория и прикладной потенциал. — М.: Экономика, 2004.
9. *Горбунов В. К.* Математическая модель потребительского спроса: учебное пособие. — Ульяновск: Изд-во УлГУ, 2001.

10. *Горбунов В. К.* Модель экономики с обобщенным рыночным спросом и единственным равновесием // Журнал экономической теории. — 2012. — №4. — С. 130-143.

11. *Горбунов В. К.* Особенности агрегирования потребительского спроса // Журнал экономической теории. — 2009. — №1. — С. 85-94.

12. *Горбунов В. К.* Производственные функции. Теория и построение : учебное пособие. — Ульяновск: Изд-во УлГУ, 2013.

13. *Горбунов В. К.* Экономическое равновесие и агрегирование покупателей. Реабилитация теоремы Вальда // Журнал экономической теории. — 2011. — №3. — С. 130-143.

14. *Горбунов В. К., Львов А. Г.* Построение производственных функций по данным об инвестициях // Экономика и математические методы. — 2012. — Вып. 2. — С. 95-107.

15. *Горбунов В. К., Львов А. Г.* Построение трехфакторной производственной функции с переменной эластичностью замещения // Труды Средневолжского математического общества. — 2009. — Т. 11. — Вып. 1. — С. 91-100.

16. *Демиденко Е. З.* Оптимизация и регрессия. — М.: Наука, 1989.

17. *Дмитриев А. Г., Козелецкая Т. А., Герман Е. А.* Теория потребительского спроса. Психофизическое обоснование дифференциального уравнения кардиналистской полезности // Журнал экономической теории. — 2011. — №1. — С. 111-117.

18. *Клейнер Г. Б.* Производственные функции. Теория, методы, применение. — М.: Финансы и статистика, 1986.

19. *Лопатников Л. И.* Экономико-математический словарь. Словарь современной экономической науки. — М.: Дело, 2003.

20. *Львов А. Г.* Развитие методов построения производственных функций : дис. ... канд. экон. наук. — Уфа: УГТАУ, 2012.

21. *Маршалл А.* Принципы экономической науки. Т. I. — М.: Прогресс, 1993.

22. *Одоевский В. Ф.* Городок в табакерке. — М.: Детская литература, 1986.

23. *Плакунов М. К., Раяцкас Р. Л.* Производственные функции в экономическом анализе. — Вильнюс: Минтис, 1984.

24. *Раяцкас Р. Л., Плакунов М. К.* Количественный анализ в экономике. — М.: Наука, 1987.

25. *Самуэльсон П. А.* Основания экономического анализа — СПб.: Экономическая школа, 2002.

26. *Терехов Л. Л.* Производственные функции. — М.: Статистика, 1974.

27. *Черемных Ю. Н.* Микроэкономика. Продвинутый уровень: учебник. — М.: Инфра-М, 2008.

28. *Barnett II, William*. Dimensions and Economics. Some Problems // Quarterly Journal of Austrian Economics. — 2004. — Vol. 7 (1). — P. 95-104.

29. Capital-Labor Substitution and Economic Efficiency / Arrow K. J., Chenery H. B., Minhas B. S., Solow R. M. // The Review of Economics and Statistics. — 1961. — Vol. 43. — No 3. — P. 225-290.

30. *Cobb G. W., Douglas P. H.* A theory of production // American Economic Review. — 1928. — December. — P. 139-165.

31. *Folsom R. N., Gonzalez R. A.* Dimensions and economics: some answers // Quarterly Journal of Austrian Economics. 2005. — V. 8. — No 4. — P. 45-65.

32. *Geary R. C.* A note on "A constant-utility index of the cost of living" // Review of Economic Studies. — 1950. — Vol. 18. — No 1. — P. 65-66.

33. *Hackman S. T.* Production Economics. Integrating the Microeconomic and Engineering Perspectives. — Berlin: Springer, 2008.

34. *Hicks J. R., Allen R. G. D.* A Reconsideration of the Theory of Value. Part II. A Mathematical Theory of Individual 15and Functions // Economica. New Series. — 1934. — Vol. 1. — No 2. — P. 196-219.

35. *Mas-Colell A., Whinston M., Green J.* Microeconomic Theory. — New York: Oxford University Press, 1995.

36. *Mishra S. K.* A Brief History of Production Functions (October 9, 2007). Available at SSRN: [electronic resource]. URL: http://ssrn.com/abstract=1020577 (time access 30.08.2013).

37. *Pollak R. A., Wales T. J.* Estimation of the Linear Expenditure System // Econometrica. — 1969. — Vol. 37. — No 4.

38. *Revankar N. S.* A class of variable elasticity of substitution production functions // Econometrica. — 1971. — Vol. 39. — No 1.

39. *Robinson J.* The Production Function and the Theory of Capital // Review of Economic Studies. — 1953. — Vol. 21 (2). — P. 81-106.

УДК 330.42;519.865.5

Ключевые слова: производственные функции, теория размерностей, индексные производственные функции, функциональные модели, псевдо черный ящик