

ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

МАКРОЭКОНОМИКА С ХИМИЧЕСКИМ ПОТЕНЦИАЛОМ

Д. Н. Качевский

В рамках термодинамического подхода к макроэкономике для идеальной макроэкономической системы, подчиняющейся статистике Бозе — Эйнштейна с ненулевым химическим потенциалом, построено уравнение состояния системы. Показано, что в определенные периоды экономика США XX в. подчинялась этой статистике и удовлетворяла полученному уравнению состояния. Показано, что федеральный бюджет США имеет кластерную структуру. Имеют место два вида кластеров: n -кластеры и μ -кластеры, обладающих различными свойствами, при этом имеет место чередование кластеров различного вида. Каждый из кластеров соответствует определенному темпу падения рентабельности при росте затратной части федерального бюджета. С течением времени темп этого падения у n -кластеров уменьшается, а у μ -кластеров остается неизменным.

Введение

В работе [2] для описания макроэкономических систем (МКЭС) применялся термодинамический метод [4, 5]. Рассматривалась модель идеальной равновесной бозе-МКЭС тождественных предприятий, распределение энергии которых представлялось статистикой Бозе — Эйнштейна. Предполагалось, что изменение числа предприятий N системы не связано с работой системы, а значит, химический потенциал μ мог считаться равным нулю.

Первое начало термодинамики представлялось в стандартной форме $\delta Q = \delta U + \delta A$, описывающей ситуацию, когда малое увеличение тепла в системе на величину δQ расходуется на увеличение внутренней энергии системы dU , и на совершение системой работы $\delta A = DdC$ по увеличению C — объема рынка (совокупного спроса) на величину dC . Здесь $D = N/\chi_r$ — деловая активность (число предприятий на единицу совокупных затрат МКЭС в режиме функционирования МКЭС с максимальной рентабельностью, см. [3]).

Понятие теплоты МКЭС связывается с теплотой экономических отношений — уровнем экономических и информационных свобод.

Экономический смысл внутренней энергии предприятия связан со способностью предприятия осуществлять оптимизацию своей деятельности. С ростом скорости оптимизации растет и внутренняя энергия (прямая пропорциональность имеет место только при значении иерархического параметра $n = 1$). Оптимизация в таком случае рассматривается в широком значении — как оптимизация технологических процессов, оптимизация финан-

совых потоков и планов, изменение удельных весов различных производственных факторов, влияющих на структуру производственной функции предприятия и др.

Процесс оптимизации может быть направлен на достижение максимального значения прибыли, рентабельности, минимизации налоговых отчислений, достижения определенного уровня социально значимых факторов и др.

Следствием модели явилась необходимость существования линейных кластеров — участков с линейной зависимостью логарифмов совокупных затрат и рентабельности инвестиций. Каждый кластер характеризовался фиксированным значением иерархического параметра n . Такие n -кластеры, действительно, были обнаружены в экономике США в период 1901–2011 гг. В то же время, отдельные участки указанных зависимостей, несмотря на свою линейность, не могли быть описаны линейными n -кластерами. Так, например, линейный кластер, соответствующий последнему двадцатилетию, оказался не подлежащим указанному описанию, поскольку для его идентификации линейным n -кластером необходимо было бы выйти за рамки принятых ограничений на иерархический параметр $0 < n < 1$.

В настоящей работе указанное ограничение оказалось возможно преодолеть с помощью введения в рассмотрение отличного от нуля химического потенциала μ . При этом для равновесного состояния МКЭС первое начало термодинамики представляется в форме $\delta Q = \delta U + \delta A - \mu dN$, где последнее слагаемое представляет неотрицательную ра-

боту системы по созданию новых предприятий ($\mu < 0$).

Вводится описание нового объекта МКЭС-линейных μ -кластеров. На примере экономики США показано, что не только кластер последнего двадцатилетия является линейным μ -кластером, но такой кластер соответствует также и периоду 1917–1939 гг. Имеет место чередование n - и μ -кластеров. Показано, что в линейных μ -кластерах не остается фиксированным значение иерархического параметра, но остается практически неизменным наклон этих кластеров (темп уменьшения рентабельности инвестиций при увеличении их объема).

Оба рассмотренных типа линейных кластеров описывают процессы уменьшения рентабельности инвестиций при росте объема финансирования МКЭС. Различные типы линейных кластеров характеризуется разными темпами такого уменьшения. Поведение МКЭС, соответствующее рассмотренным кластерным структурам, может быть названо дыханием МКЭС, причем n - и μ -кластеры при этом могут быть отнесены к фазам выдоха, в то время как рост рентабельности инвестиций при увеличении их объема следовало бы, соответственно, назвать фазами вдоха.

1. Уравнение состояния МКЭС с химическим потенциалом

Рассмотрим равновесное состояние бозе-МКЭС с химическим потенциалом μ , отличным от нуля, тогда первое начало термодинамики принимает вид $\delta Q = \delta U + \delta A - \mu dN$, где последнее слагаемое представляет неотрицательную работу системы по созданию новых предприятий ($\mu < 0$).

Малое увеличение тепла МКЭС на величину δQ расходуется на внутренней энергии dU , а также на совершение положительной работы по увеличению объема рынка (спроса) $\delta A = DdC$ и положительной работы по созданию новых предприятий $-\mu dN$.

Для внутренней энергии каждого предприятия остается прежнее значение [2], $\varepsilon = (-p/m)^n/n$ с каноническим импульсом p , отрицательное значение которого связано с уменьшением канонической координаты q -ошибки инвестирования, в процессе выравнивания, т. е. в процессе перехода МКЭС в равновесное состояние при стремлении системы к оптимальному значению экономических параметров, по которым проводится оптимизация [3].

Итак, внутренняя энергия каждого предприятия, согласно [2, (2.36)], для случая $\mu < 0$ выбирается в виде

$$\varepsilon = \frac{1}{n} \cdot \left(-\frac{p}{m} \right)^n, \tag{1.1}$$

а внутренняя энергия МКЭС, согласно [2, (2.37)], представляется как

$$U = \frac{g}{h} \int \frac{\varepsilon d\Gamma}{e^{(\varepsilon-\mu)/kR} - 1} = \frac{g}{h} \int \frac{(1/n)(-p/m)^n d\Gamma}{\exp\left[\frac{(-p/m)^n}{nkR} - \frac{\mu}{kR}\right] - 1}, \tag{1.2}$$

и после интегрирования по всему фазовому пространству принимает вид:

$$U = \frac{g}{h} \int_0^c dq \int_{-\infty}^0 \frac{(1/n)(-p/m)^n dp}{\exp\left[\frac{(-p/m)^n}{nkR} - \frac{\mu}{kR}\right] - 1} = \frac{Cmg}{h} \frac{(kR)^{1+1/n}}{n^{1-1/n}} \int_0^\infty \frac{x^{1/n} dx}{\exp(x-a) - 1}, \tag{1.3}$$

где

$$x \equiv \frac{1}{nkR} \left(-\frac{p}{m} \right)^n, \quad a \equiv \frac{\mu}{kR} < 0. \tag{1.4}$$

Поскольку химический потенциал предполагается отрицательным во внутренних точках области интегрирования, подинтегральная функция оказывается ограниченной.

Для вычисления интеграла воспользуемся частным случаем табличного интеграла, 3.411(6) [1],

$$\int_0^\infty \frac{x^{\nu-1} dx}{e^x - \lambda} = \Gamma(\nu) \cdot {}_1F_1(\lambda, \nu; 1),$$

$$\begin{aligned} & \text{(либо } |\lambda| \leq 1, \lambda \neq 1, \operatorname{Re} \nu > 0; \\ & \text{либо } \lambda = 1, \operatorname{Re} \nu > 1), \end{aligned} \tag{1.5}$$

тогда для внутренней энергии системы имеет место выражение

$$U = \frac{Cmg}{h} \frac{(kR)^{1+1/n}}{n^{1-1/n}} \int_0^\infty \frac{x^{1/n} dx}{\exp(x-a) - 1} = \frac{Cmg}{h} \frac{(kR)^{1+1/n}}{n^{1-1/n}} e^a \int_0^\infty \frac{x^{1/n} dx}{e^x - e^a}, \tag{1.6}$$

и, с учетом обозначений (1.4), внутренняя энергия системы оказывается равной

$$U = \frac{Cmg}{h} \frac{(kR)^{1+1/n}}{n^{1-1/n}} e^{\frac{\mu}{kR}} \Gamma\left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot {}_1F_1\left(e^{\frac{\mu}{kR}}, 1 + \frac{1}{n}; 1\right). \tag{1.7}$$

Вырожденная гипергеометрическая функция может быть представлена рядом

$${}_1F_1(x, y; z) \equiv \Phi(x, y; z) = 1 + \frac{x}{y} \frac{z}{1!} + \frac{x(x+1)}{y(y+1)} \frac{z^2}{2!} + \frac{x(x+1)(x+2)}{y(y+1)(y+2)} \frac{z^3}{3!} + \dots (1.8)$$

Для числа предприятий МКЭС, согласно [2, (2.47)], имеет место выражение

$$N = \frac{g}{h} \int \frac{d\Gamma}{e^{(\varepsilon-\mu)/kR} - 1}. \quad (1.9)$$

Интегрирование по всему фазовому пространству, аналогично (1.3), приводит к выражению

$$N = \frac{gC}{h} \frac{m(kR)^{1/n}}{n^{1-1/n} e^{-a}} \int_0^\infty \frac{x^{-1+1/n}}{e^x - e^a} dx = \frac{Cmg}{h} \frac{(kR)^{1/n}}{n^{1-1/n} e^{-a}} \Gamma\left(\frac{1}{n}\right) {}_1F_1\left(e^a, \frac{1}{n}; 1\right). \quad (1.10)$$

Поскольку при фиксированных значениях объема рынка C и общем числе предприятий N химический потенциал оказывается зависящим только от абсолютной рентабельности R , рассмотрим предельную ситуацию, когда химический потенциал $\mu \rightarrow 0$, при этом параметр $a \rightarrow 0$, тогда предельное значение абсолютной рентабельности R_0 может быть представлено в виде

$$R_0 = \frac{1}{nk} \left(\frac{Nhn}{gCm\Gamma(1/n) \cdot {}_1F_1(1, 1/n; 1)} \right)^n, \quad (1.11)$$

а внутренняя энергия системы может быть записана в виде

$$U = NkR \frac{(R/R_0)^{1/n} {}_1F_1\left(e^{\mu/kR}, 1 + \frac{1}{n}; 1\right)}{n^{1/n} e^{-\mu/kR}} \cdot \frac{1}{{}_1F_1\left(1, \frac{1}{n}; 1\right)}. \quad (1.12)$$

При этом выражение (1.11) для общего числа предприятий системы можно представить уравнением

$${}_1F_1\left(1, \frac{1}{n}; 1\right) = \left(\frac{R}{R_0}\right)^{1/n} \cdot e^{\mu/kR} \cdot {}_1F_1\left(e^{\mu/kR}, \frac{1}{n}; 1\right). \quad (1.13)$$

Уравнение неявно определяет химический потенциал μ .

Для нахождения термодинамического W -потенциала воспользуемся формулой [2, (2.33)]:

$$\Omega = U - RS - \Phi = \frac{kgR}{h} \int \ln\left(1 - e^{(\mu-\varepsilon)/kR}\right) d\Gamma. \quad (1.14)$$

Интегрируем по всему фазовому пространству:

$$\Omega = \frac{kgR}{h} \int_0^c dq \int_{-\infty}^0 \ln\left[1 - \exp\left(\frac{\mu}{kR} - \frac{(-p/m)^n}{nkR}\right)\right] dp. \quad (1.15)$$

Интегрирование по импульсу проводим по частям, учитывая, что внеинтегральный член обращается в нуль, как на верхнем, так и на нижнем пределах:

$$\begin{aligned} \Omega &= \frac{kgRCm(kR)^{1/n}}{hn^{1-1/n}} \left[\int_0^\infty x^{-1+1/n} \ln(1 - \exp(a-x)) dx \right] = \\ &= \frac{kgRCm(kR)^{1/n}}{hn^{1-1/n}} \left[\int_0^\infty \ln(1 - e^{a-x}) dx^{1/n} \right] = \\ &= \frac{kgRCm(kR)^{1/n}}{hn^{1-1/n}} \left[- \int_0^\infty \frac{x^{1/n}}{1 - e^{a-x}} e^{a-x} dx \right] = \\ &= -n \frac{Cmg(kR)^{1+1/n} e^a}{hn^{1-1/n}} \left[\int_0^\infty \frac{x^{1/n}}{e^x - e^a} dx \right] = -nU \quad (1.16) \end{aligned}$$

Учитывая также равенство $\Omega = -DC$, уравнение состояния вырожденной МКЭС может быть представлено в виде

$$D = \frac{mg}{h} \frac{(kR)^{1+1/n}}{n^{-1/n}} e^{kR} \Gamma\left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot {}_1F_1\left(e^{\frac{\mu}{kR}}, 1 + \frac{1}{n}; 1\right), \quad (1.17)$$

или, вводя параметр R_0 в соответствии с формулой (1.12) и исключая параметр mg/h , получаем новую форму уравнения состояния МКЭС, и вместе с уравнением (1.14), определяющим неявно химический потенциал, получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} DC &= NkR \left(\frac{R}{R_0}\right)^{1/n} e^{\mu/kR} \frac{{}_1F_1\left(e^{\mu/kR}, 1 + 1/n; 1\right)}{{}_1F_1\left(1, 1/n; 1\right)}, \\ {}_1F_1\left(1, \frac{1}{n}; 1\right) &= \left(\frac{R}{R_0}\right)^{1/n} \cdot e^{\mu/kR} \cdot {}_1F_1\left(e^{\mu/kR}, \frac{1}{n}; 1\right), \quad (1.18) \end{aligned}$$

которая может быть названа общим уравнением равновесного состояния бозе-МКЭС.

Заметим, что из уравнений (1.19) следует симметричная форма уравнения состояния бозе-МКЭС.

$$DC = NkR {}_1F_1\left(e^{\mu/kR}, 1 + 1/n; 1\right) / {}_1F_1\left(e^{\mu/kR}, 1/n; 1\right). \quad (1.19)$$

2. Оценка величины химического потенциала МКЭС

Представим второе уравнение общего уравнения состояния бозе-МКЭС (1.18) в виде

$${}_1F_1\left(1, \frac{1}{n}; 1\right) \left(\frac{R_0}{R}\right)^{1/n} = e^{\mu/kR} \cdot {}_1F_1\left(e^{\mu/kR}, \frac{1}{n}; 1\right), \quad 0 < x \leq 1 \quad (2.1)$$

и, после введения обозначений, представим как

$$\begin{aligned} q &= x\Phi(x, y; 1); \quad q \equiv {}_1F_1\left(1, \frac{1}{n}; 1\right) (R_0/R)^{1/n}, \\ x &\equiv e^{\mu/kR}, \quad y \equiv 1/n; \quad y \geq 1 \Rightarrow x \leq y. \quad (2.2) \end{aligned}$$

Поскольку для введенных переменных выполняется свойство

$$(x + p)/(y + p) \geq x/y \equiv a, (p > 0, a \leq 1), \quad (2.3)$$

то для вырожденной гипергеометрической функции имеют место легкопроверяемые неравенства:

$$\begin{aligned} \exp\left(\frac{xz}{y}\right) < \Phi(x, y; z) < 1 + \frac{x}{y}(e^z - 1) \Rightarrow \\ \Rightarrow x \exp\left(\frac{x}{y}\right) < q < x + \frac{x^2}{y}(e - 1), \end{aligned} \quad (2.4)$$

откуда для параметра x имеет место неравенство

$$x \exp\left(\frac{x}{y}\right) < q < x + \frac{x^2}{y}(e - 1), \quad (2.5)$$

решая которое относительно x , с использованием функции Ламберта, для химического потенциала получаем оценку

$$\frac{-y + \sqrt{y^2 + 4yq(e - 1)}}{2(e - 1)} < x < y \text{LambertW}\left(\frac{q}{y}\right), \quad (2.6)$$

или

$$\begin{aligned} M_1 \equiv \ln \left[\frac{-1 + \sqrt{1 + 4n(e - 1) {}_1F_1(1, 1/n, 1)(R_0/R)^{1/n}}}{2n(e - 1)} \right] < \\ < \frac{\mu}{kR} < \ln \left[\frac{1}{n} \text{LambertW} \left(n {}_1F_1\left(1, \frac{1}{n}, 1\right) \left(\frac{R_0}{R}\right)^{\frac{1}{n}} \right) \right] \equiv M_2. \end{aligned}$$

В качестве оценки химического потенциала может быть выбрана величина

$$\mu \approx kR(M_1 + M_2)/2. \quad (2.7)$$

Здесь $y = \text{LambertW}(x)$ — функция Ламберта, удовлетворяет алгебраическому уравнению $y \cdot e^y = x, (y \geq -1)$.

3. Оценка параметров уравнения состояния

Представим первое уравнение общего уравнения состояния бозе-МКЭС (1.18):

$$\begin{aligned} DC = NkR \left(\frac{R}{R_0}\right)^{1/n} e^{\mu/kR} \frac{{}_1F_1(e^{\mu/kR}, 1 + 1/n; 1)}{{}_1F_1(1, 1/n; 1)}, \\ 0 < n \leq 1; \end{aligned}$$

в виде

$$DC = NkR/q \cdot x\Phi(x, y; 1), \quad (3.1)$$

$$q \equiv \left(\frac{R_0}{R}\right)^{1/n} {}_1F_1\left(1, \frac{1}{n}, 1\right), \quad x \equiv e^{\mu/kR}, \quad y \equiv 1 + 1/n;$$

$$0 < x \leq 1, \quad y \geq 2 \Rightarrow x \leq y. \quad (3.2)$$

Поскольку для введенных переменных по-прежнему выполняется свойство (2.3), после простых преобразований для оценки вырожденной гипергеометрической функции, в соответствии с уравнением состояния (3.1) получаем оценку

$$\begin{aligned} L_1 \equiv \frac{R}{q} \left\{ x + \frac{x^2}{y} + \frac{x^2(x+1)(y+2)^2}{y(y+1)(x+2)^2} \left[\exp\left(\frac{x+2}{y+2}\right) - \frac{x+2}{y+2} - 1 \right] \right\} < \\ < \frac{DC}{Nk} < \frac{R}{q} \left\{ x + \frac{x^2}{y} + \frac{x^2(x+1)}{y(y+1)}(e - 2) \right\} \equiv L_2. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Здесь параметры q, x, y определяются тождествами (3.2), в то время как значение химического потенциала μ оценивается выражением (2.7) со значениями параметров q, x, y определенными тождествами (2.2).

Уравнение состояния идеальной бозе-МКЭС с достаточной точностью может быть записано как

$$DC = Nk(L_1 + L_2)/2, \quad (3.4)$$

где параметры L_1, L_2 соответствуют нижней и верхней границам неравенства (3.3).

Проведем также оценку уравнения состояния бозе-МКЭС в форме (1.17). В обозначениях (3.2) оно имеет вид

$$D = QR^{1+1/n} x\Phi(x, y; 1), \quad Q \equiv \frac{mg(nk)^{1+1/n}}{hn^2} \Gamma\left(\frac{1}{n}\right). \quad (3.5)$$

С учетом оценки для вырожденной гипергеометрической функции имеет место неравенство

$$\begin{aligned} S_1 \equiv \left\{ x + \frac{x^2}{y} + \frac{x^2(x+1)(y+2)^2}{y(y+1)(x+2)^2} \left[\exp\left(\frac{x+2}{y+2}\right) - \frac{x+2}{y+2} - 1 \right] \right\} < \\ < \frac{DQ^{-1}}{R^{1+1/n}} < \left\{ x + \frac{x^2}{y} + \frac{x^2(x+1)}{y(y+1)}(e - 2) \right\} \equiv S_2. \end{aligned} \quad (3.6)$$

При этом приближенная форма уравнения состояния бозе-МКЭС (3.5) может быть представлена в виде

$$D \approx \frac{1}{2} QR^{1+1/n} (S_1 + S_2). \quad (3.7)$$

Здесь параметры, стоящие в скобках и определенные выражением (3.6), зависят от абсолютной рентабельности R посредством зависимости от нее параметра x , как напрямую, так и через зависимость химического потенциала, согласно формулам (3.2) и (1.13).

Полученная форма уравнения состояния (3.7) отличается более сложной зависимостью деловой активности D от абсолютной рентабельности, чем аналогичное уравнение для

бозе-МКЭС с нулевым химическим потенциалом [2, (2.45)], которое для сравнения можно представить в виде

$$D = QR^{1+\frac{1}{n}} \left(1 + \frac{1}{n}\right). \quad (3.8)$$

4. Логарифмическая линейаризация уравнения состояния

В отличие от уравнения состояния бозе-МКЭС с нулевым химическим потенциалом (3.8), которое после логарифмирования приводилось к линейной форме зависимости $\ln D$ от $\ln R$ — уравнение состояния (3.7) с отличным от нуля химическим потенциалом — ввиду сложной зависимости множителя в скобках от абсолютной рентабельности R , вообще говоря, не должна линейаризоваться в дважды логарифмических координатах. Покажем, однако, что в рассматриваемом приближении такая линейаризация оказывается возможной.

Действительно, логарифмируя уравнение (3.7) с учетом определения деловой активности $D = N/x_r$, как отношения числа предприятий (производственных единиц) N к потоку x_r совокупных затрат МКЭС при работе в режиме максимальной рентабельности [3] получаем выражение

$$\ln x_r = \nu - \left(1 + \frac{1}{n}\right) \ln R - \ln S(\exp \ln R);$$

$$S(R) \equiv S_1 + S_2; \nu \equiv \ln \frac{2N}{Q}. \quad (4.1)$$

Зависимость $\ln(x_r) - \nu$ от $\ln R \equiv lr$ практически оказывается линейной. Действительно, рассмотрим, например, случай $\nu = 14,5$; $-0,4 \leq lr \leq 0,2$; $R_0 = 0,28$. Соответствующая поверхность представлена на рис. 1. Цилиндрическая поверхность при фиксированном значении $0 < n \leq 1$ определяет линейную образующую.

Таким образом, уравнение (4.1) фактически представляет собой линейную зависимость $\ln x_r$ от $\ln R$. Более того, множитель, стоящий перед $\ln R$, зависящий от n , в уравнении (4.1), нивелируется последним слагаемым $\ln S(R)$ правой части уравнения таким образом, что угол наклона прямой (4.1) остается практически постоянным, не зависящим от иерархического параметра n .

Таким образом, прямая (4.1) в дважды логарифмических координатах $(\ln x_r, \ln R)$ представляет выделенное направление, не зависящее от иерархического параметра n . В окрестности прямой формируется μ -кластер. На рис. 2 два

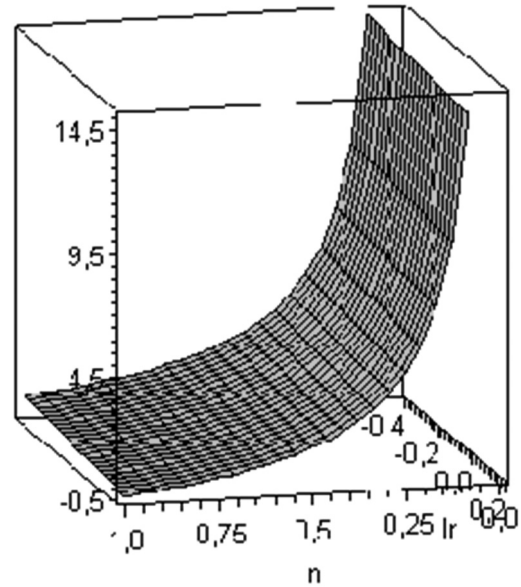


Рис. 1. Рисунок поверхности $\ln(x_r) - \nu$, в соответствии с (4.1) при значениях параметров $R_0 = 0,28$; $\nu = 14,5$; $-0,4 \leq lr \leq 0,2$. Наклон образующих цилиндрической поверхности не зависит от значений иерархического параметра n

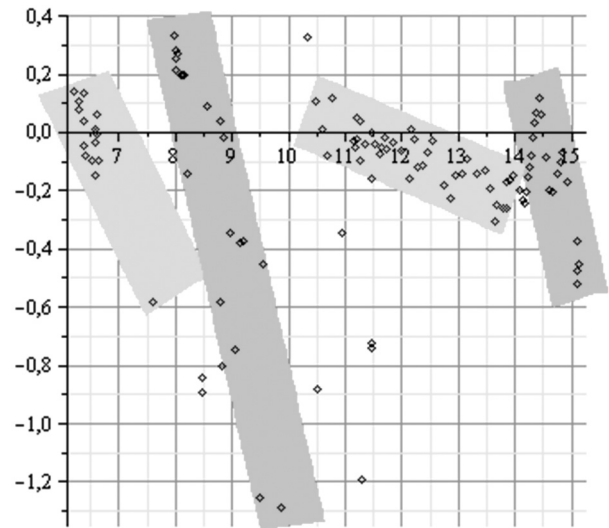


Рис. 2. Линейные n - и μ -кластеры федерального бюджета США с 1901 по 2012 гг. представлены в осях $(\ln x_r, \ln R)$, где $R \equiv y_r/x_r$ — абсолютная рентабельность совокупных затрат. Каждая точка соответствует одному годовому бюджету

таких кластера — второй и четвертый (отсчет слева направо), представлены двумя параллельными полосами. Они отличаются от n -кластеров, рассмотренных в работе [2] тем, что наклон последних к оси $\ln x_r$, существенно зависел от иерархического параметра n . На рис. 2 два таких n -кластера, первый и третий, представлены двумя более пологими полосами.

Явное выражение для параметра ν , определенного правым тождеством (4.1) для μ -кластера, средняя линия которого представлена уравнением (4.1), получим подставкой значения N из формулы (1.10) и параметра Q из тождества (3.5):

$$\nu = \ln \left[\frac{2CR^{1/n} e^{\mu/kR}}{kn^2} \Phi \left(e^{\mu/kR}, \frac{1}{n}; 1 \right) \right], \quad (4.2)$$

где вырожденная гипергеометрическая функция определяется рядом (3.3).

5. Линейные μ -кластеры федерального бюджета США

В работе [2] рассматривались идеальные равновесные состояния бозе-МКЭС с нулевым химическим потенциалом. Из теории следовало существование линейных кластеров как сосредоточения на плоскости $(\ln x_r, \ln R)$ в окрестности выделенных направлений множества точек значений логарифмов абсолютной рентабельности R и потоков совокупных затрат x_r МКЭС в режиме функционирования системы с максимальной рентабельностью [3].

Направление линейных кластеров полностью определялось значением иерархического параметра n . Такие n -кластеры были обнаружены в экономике США XX века, согласно данным федерального бюджета США, его доходной u и расходной x_r составляющими (в млн долл.). Так, на рис. 2 построен график зависимости $\ln R$ от $\ln x_r$, где $R \equiv u_r/x_r$ — абсолютная рентабельность инвестиций. Два пологих n -кластера соответствуют первой и третьей заштрихованным полосам (отсчет слева направо).

Для бозе-МКЭС с отличным от нуля химическим потенциалом имеют место линейные μ -кластеры с уравнением средней линии (4.1). На рис. 2 они представлены второй и четвертой параллельными полосами, пересекающими ось $\ln x_r$ в точках 8,5 и 14,5. Их наклон одинаков и не зависит от значений иерархического параметра n , как это имело место для n -кластеров (см. [2]).

Значение параметра R_0 выбирается с учетом того, что химический потенциал отличен от нуля только для области значений абсолютной рентабельности $R > R_0$. И поскольку рассматриваются возможные реализации μ -кластеров на временном промежутке 1901–2012 гг., в качестве R_0 берется минимальное на этом периоде значение абсолютной рентабельности, соответствующее 1919 г., т. е.

$$R_0 = R_{\min} = R_{1919} = 0,2774022603. \quad (5.1)$$

Для $\mu_{14,5}$ -кластера зависимость параметра ν прямой (4.1) от параметра n может быть аппроксимирована функцией

$$\nu(n) \approx 2 + c(n-0,1)^g + \frac{a}{n}(n-0,1)^{b/2}, \quad (5.2)$$

где $g = 0,81$; $c = 73,12$; $a = 66,61$; $b = 3,75$.

Для $\mu_{8,5}$ -кластера зависимость параметра ν прямой (4.1) от параметра n может быть аппроксимирована функцией

$$\nu(n) \approx \frac{c}{n}(n-0,135)^g + \frac{a}{n^2}(n-0,135)^{b/2}, \quad (5.3)$$

где $g = 1,13$; $c = 9,22$; $a = 1,05$; $b = 2,45$.

Зависимость совокупного спроса C от абсолютной рентабельности R совокупных затрат и иерархического параметра n в линейных μ -кластерах следует из формулы (4.2) после ее обращения и подстановки вместо параметра ν выражений (5.2) или (5.3) для $\mu_{14,5}$ -кластера и $\mu_{8,5}$ -кластера, соответственно:

$$C = \frac{kn^2 \exp \left(\frac{\nu(n)kR - \mu}{kR} \right)}{2R^{1/n} \Phi \left(\exp \left(\frac{\mu}{kR} \right), \frac{1}{n}; 1 \right)}, \quad (5.4)$$

где явное выражение для химического потенциала μ определяется выражением (2.7).

Уравнение средней линии $\mu_{8,5}$ -кластера (1917–1939 гг.) имеет вид

$$\ln R = -0,8625(\ln x_r - 8,5), \quad (8,05 < \ln x_r < 10,05). \quad (5.5)$$

Уравнение средней линии $\mu_{14,5}$ -кластера (1991–2012 гг.) имеет вид

$$\ln R = -0,96(\ln x_r - 14,5), \quad (14,3 < \ln x_r < 15,1). \quad (5.6)$$

В работе [2] рассматривались только n -кластеры, для которых имело место пересечение. В области пересечения кластеров МКЭС одновременно могла находиться в двух состояниях при разных значениях иерархического параметра n , но при одинаковом нулевом значении химического потенциала, причем эти состояния могли быть и непоследовательными во времени. Каждый кластер характеризовался определенным значением иерархического параметра n и соответствовал определенному отклику экономики — темпу уменьшения рентабельности при росте бюджетного финансирования.

В настоящей работе помимо n -кластеров вводятся новые объекты — μ -кластеры, обла-

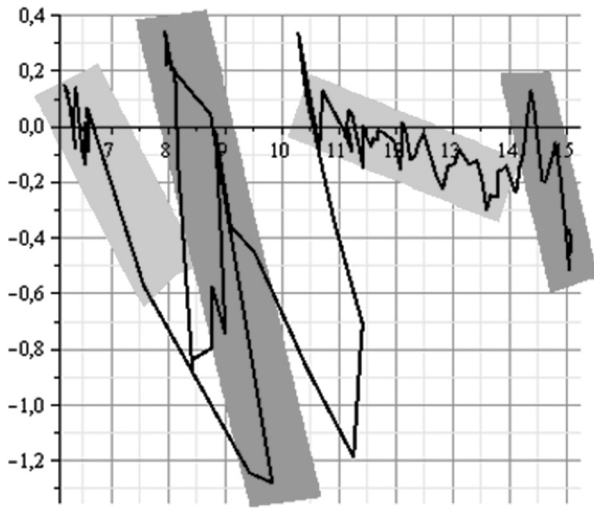


Рис. 3. Кластерная структура федерального бюджета США с отражением временной связи вершин (одна вершина — один годовой бюджет), характеризуется разным темпом уменьшения рентабельности R при росте объема финансирования x_t

дающие, как отмечалось выше, свойствами, не присущими n -кластерам. А именно, независимостью наклона μ -кластеров от иерархического параметра n и поэтому сохранением выделенных направлений на плоскости $(\ln x_t, \ln R)$ неизменными. Поэтому, учитывая, что n - и μ -кластеры чередуются во времени, следует эти кластеры разделить без их пересечения, как это и сделано на рис. 2, без явно выраженного учета их временной связи. На рис. 3 изображены те же кластеры, но с временной последовательностью вершин, (одна вершина — один годовой бюджет). Область, не покрываемая кластерами, соответствует неравновесным состояниям МКЭС, связанными с процессами выравнивания, переходом из неравновесного в равновесное состояние [5].

Для приведенных на рис. 2, 3 n - и μ -кластеров дадим новое описание, теперь уже непересекающихся n -кластеров (первый и третий кластеры), нумеруя их слева направо, с указанием средней направляющей прямой кластера, а также определяя динамику совокупного спроса C МКЭС как функцию абсолютной рентабельности R :

1) первый n -кластер (1901–1917) гг., $n = 0,667$;

$$\ln R = 2,65 - 0,4 \cdot \ln x_t, \quad (6,2 \leq \ln x_t \leq 9,825);$$

$$C = 754 k_0 / R^{3/2};$$

2) третий n -кластер (1947–1990) гг., $n = 0,09$;

$$\ln R = 0,93 - 0,083 \ln x_t, \quad (7,9 \leq \ln x_t \leq 15,5);$$

$$C = 73484 k_0 / R^{11}.$$

Здесь модифицированная экономическая постоянная Больцмана k_0 определяется, как и в [2], выражением $k_0 \equiv k \zeta(1+1/n) / \zeta(1/n)$.

Второй и четвертый параллельные μ -кластеры, изображенные на рис. 2, 3, являются $\mu_{8,5}$ -кластером (1917–1939 гг.) и $\mu_{14,5}$ -кластером (1991–2012 гг.) с уравнениями средних линий соответственно (5.5) и (5.6) и динамикой совокупного спроса C МКЭС, определенной формулой (5.4) с учетом зависимости параметра кластеров $\nu(n)$, заданной выражениями (5.3) и (5.2).

Наличие кластерной структуры федерального бюджета США подтверждает, что экономика США XX в. являлась идеальной равновесной бозе-МКЭС с нулевой работой системы по изменению числа предприятий системы для n -кластеров (с равным нулю химическим потенциалом), в период (1901–1917 и 1947–1990 гг.); а также являлась идеальной равновесной бозе-МКЭС с ненулевой работой системы по изменению числа предприятий системы для μ -кластеров, (с отличным от нуля химическим потенциалом), в период (1917–1939 и 1991–2012 гг.).

Оба рассмотренных типа линейных кластеров описывают процессы уменьшения рентабельности при росте объема финансирования МКЭС. Различные типы линейных кластеров характеризуется разными темпами такого уменьшения. Для n -кластеров со временем темп снижается, а для μ -кластеров темп неизменен.

Поведение МКЭС, соответствующее рассмотренным кластерным структурам, может быть названо дыханием МКЭС, причем n - и μ -кластеры при этом могут быть отнесены к фазам выдоха, в то время как рост рентабельности инвестиций при увеличении их объема следовало бы, соответственно, назвать фазами вдоха.

Список источников

1. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и производений. — М: Физматгиз, 1963. — 1100 с.

2. Качевский Д. Н. Макроэкономика с нулевым химическим потенциалом // Журнал экономической теории. — 2012. — №2. — 94-102.
3. Качевский Д. Н. О гоморентабельности в экономике // Управление развитием крупномасшт. систем MLSD'2011: материалы пятой междунар. конф. (3-5 окт. 2011 г.). — М.: ИПУ РАН, 2011. — Т. I. — С. 41-44.
4. Качевский Д. Н. Термодинамика и статистика макроэкономических системы // Математическая теория систем МТС-09: труды междунар. конф. (26-30 янв. 2009 г.). — М.: ИСА РАН, 2009. — 155-159.
5. Румер Ю. Б., Рывкин М. Ш. Термодинамика, статистическая физика и кинетика. — М.: Наука, 1972. — 400 с.

УДК 330.115

Ключевые слова: макроэкономика, термодинамическое равновесие, химический потенциал, кластер