

## ТЕОРИЯ ПОТРЕБИТЕЛЬСКОГО СПРОСА: АГРЕГИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ ИНДИВИДУАЛЬНОГО ПОТРЕБЛЕНИЯ<sup>1</sup>

Т. А. Козелецкая, Е. А. Герман, А. Г. Дмитриев

*Указаны трудности получения функции спроса на базе функции коллективных предпочтений, рассматриваемой в рамках порядковой теории. В рамках количественной теории получена кривая коллективного спроса на благо как суперпозиция функций индивидуального потребления.*

Как известно, законом спроса принято называть утверждение об отрицательном наклоне кривой, связывающей количество покупаемого товара с его ценой. При этом принято различать так называемый индивидуальный спрос на благо (товар) и рыночный (агрегированный, коллективный). Очевидно, что рыночный спрос формируется из множества индивидуальных, а количество проданного (купленного) на рынке товара определяется суммой индивидуальных покупок.

Патриархи теории спроса А. Маршалл, Дж. Хикс считали, что в прикладном отношении построение модели рыночного спроса важнее, чем индивидуального [13, с. 104, 128]. Подобная точка зрения находит поддержку и в наше время. Ее сторонники полагают, что модель коллективного спроса важна для построения теории общего экономического равновесия, основы которой заложены Л. Вальрасом. Сегодня можно сомневаться в существовании общего экономического равновесия хотя бы потому, что в теории рассматриваются разные модели экономического роста и многие вопросы формирования цен (теории цены) ждут своего решения.

Тем не менее, и в условиях экономического равновесия и в условиях экономического роста потребительский спрос (индивидуальный и агрегированный) остается определяющим фактором развития экономики.

При анализе поведения покупателя в рамках представлений порядкового (ординалистского) подхода принято считать, что индивидуальный потребитель максимизирует «свою» функцию предпочтения (функцию порядковой полезности). Теоретически условия максимума этой функции при наличии бюджетных ограничений и определяют его индивидуальный спрос на разные блага. Порядковых функций полезности предложено много (их подборку можно найти, например, в работе [11]). Их многочисленность приводит к мысли о целесообразности и правомерности их рассмотрения

в качестве математических моделей. Отметим, что только для степенной мультипликативной функции задача об условном максимуме доведена до конечного результата — Стоуном [15] получена одна из возможных функций индивидуального спроса.

Попытки представить коллективный спрос на благо через функцию коллективных предпочтений («агрегирование покупателей») вскрыли ряд противоречий. Приведем одно из них [14]. Оказалось, что необходимым и достаточным условием корректного агрегирования является «выпрямление» кривых Энгеля, причем все индивидуальные прямые Энгеля должны быть параллельными. Это, как известно, не соответствует действительности. Уравнения для кривых Энгеля получены в работе [10].

Более подробно современное состояние проблемы агрегирования покупателей отражено в ряде публикаций В.К. Горбунова [2-6]. Совокупность обнаруженных трудностей дает основание говорить о кризисе теории. Речь идет о кризисе в рамках порядкового подхода.

В рамках представлений количественного подхода вопрос остается открытым.

Как известно, интерес к количественной теории угас еще в тридцатые годы прошлого столетия по причинам метрологического содержания. Для так называемых прямых измерений не существует метрологического эталона полезности, а для косвенных измерений тогда не было уравнения, связывающего полезность с другими измеряемыми величинами.

Возрождение количественного подхода, можно сказать, началось предложением дифференциального уравнения кардиналистской полезности (удовлетворенности) (ДифУрУ) в диссертации [12], психофизического его обоснования в [9] и получением двухпараметрического (бипараметрического) уравнения удовлетворенности (кардиналистской полезности) (БиПарУУ) и функции индивидуального потребления (ФИП) в [8].

В рамках возрожденного количественного подхода учитывается индивидуальность покупателя. Его субъективные особенности вос-

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект №11-06-00319-а «Математические модели поведения агентов рыночных отношений».

приятия того или иного блага в перечисленных выше уравнениях отображены соответствующими коэффициентами и величинами.

К ним относятся:

- $k$  и  $k_i$  — коэффициенты удовлетворения от потребления блага (в ДифУрУ и в БиПарУУ);
- $M$  — доход индивидуального потребителя (в ФИП);
- $q_0$  — уровень нейтрального потребления блага (в БиПарУУ и в ФИП);
- $q^{sat}$  — уровень насыщенного потребления (в ФИП);
- $\delta$  — коэффициент выбора (в ФИП):

$$\delta = \frac{k}{\sum_{i=1}^L k_i}, \quad (1)$$

где:  $L$  — число потребляемых благ.

Естественно, при «агрегировании» индивидуальных потребителей необходимо учитывать индивидуальность каждого из них, что приводит к необходимости учитывать статистические распределения персон по соответствующим параметрам.

В данной работе мы получим кривую покупок блага множеством его потребителей (зависимость количества купленного блага от его цены на рынке конечного потребления), построив ее при использовании ряда упрощающих предположений.

Воспользуемся результатами, полученными нами ранее в [8].

### Функция индивидуальных покупок

При конечном потреблении (покупки без спекулятивных перепродаж) зависимость количества покупаемого блага ( $q$ ) от его цены ( $c$ ) — (ФИП)<sup>1</sup> имеет вид:

$$q(c) = \begin{cases} q^{sat}; & \text{при } 0 < c < c^{sat}, \text{ где } c^{sat} = \frac{\delta \cdot M}{q^{sat}}; \\ \frac{\delta \cdot M}{c}; & \text{при } c^{sat} < c < c^{cr}, \text{ где } c^{cr} = \frac{\delta \cdot M}{q^{sat}}; \\ 0; & \text{при } c > c^{cr}; \end{cases} \quad (2)$$

где:  $q^{sat}$  — количество блага, полностью удовлетворяющее потребность индивида в нем;  $c^{sat}$  — цена, при которой покупатель в состоянии купить такое количество блага;  $q_0$  — уровень нейтрального потребления (при  $q < q_0$  вместо удовлетворенности от потребления блага по-

требитель ощущает раздражение);  $c^{cr}$  — цена, при достижении которой индивид перестает покупать благо, так как потребление его в количестве  $q = \frac{\delta M}{c^{cr}} < q_0$  вместо удовлетворения вызывает раздражение (отрицательная полезность [9]); произведение ( $\delta \cdot M$ ) — представляет собой расходы покупателя на приобретение данного блага при ценах на него в диапазоне  $c^{sat} < c < c^{cr}$ . Это произведение можно называть также допустимыми расходами на благо или выделенным на благо бюджетом. Для краткости далее будем обозначать его как  $D$ , т. е. ( $\delta \cdot M \equiv D$ ).

Графическое изображение этой функции приведено на рис 1.

На кривой индивидуальных покупок имеются три ценовых диапазона.

Первый:  $0 < c < c^{sat}$  (насыщенное потребление). При таких ценах количество потребляемого блага не зависит от цены и равно количеству ( $q^{sat}$ ), необходимому для полного удовлетворения потребности конкретного покупателя в этом благо. При этом фактические расходы на покупку блага будут зависеть от его цены ( $D^{sat}(c) = q^{sat} \cdot c$ ).

Второй:  $c^{sat} < c < c^{cr}$  (эластичное потребление). При таких ценах количество покупаемого блага зависит от его цены по гиперболическому закону. Изменение дохода покупателя ( $M$ ) и его предпочтений, вкусов, пристрастий и т. п., (учитываются коэффициентами удовлетворения  $k_i$ , которые определяют и коэффициент выбора  $\delta$ ) приводит к изменению потребления. Математически это отображается «переходом» на другую гиперболу, соответствующую новому произведению  $\delta \cdot M = \frac{k}{\sum_{i=1}^L k_i} \cdot M \equiv D$ .

По мере роста цены на участке эластичного потребления количество потребляемого блага уменьшается. Как только оно достигает уровня нейтрального потребления (значения  $q_0$ ) ощущение удовлетворения<sup>3</sup> от потребления блага сменяется на ощущение раздражения<sup>4</sup>. Это происходит при критической цене  $c^{cr} = \frac{\delta \cdot M}{q_0}$ .

Третий:  $c > c^{cr}$  (отказ от потребления). Покупатель перестает покупать данное благо.

Скачкообразное падение до нуля потребления данного блага ведет к перераспределению дохода (изменяются коэффициенты удовлет-

<sup>1</sup> В контексте работы [8] ее называли функцией индивидуального потребления. В контексте данной работы покупки без цели спекулятивных перепродаж означают конечное потребление.

<sup>2</sup> Верхний индекс «sat» от англ. *saturation* — насыщение.

<sup>3</sup> Положительная полезность.

<sup>4</sup> Отрицательная полезность.

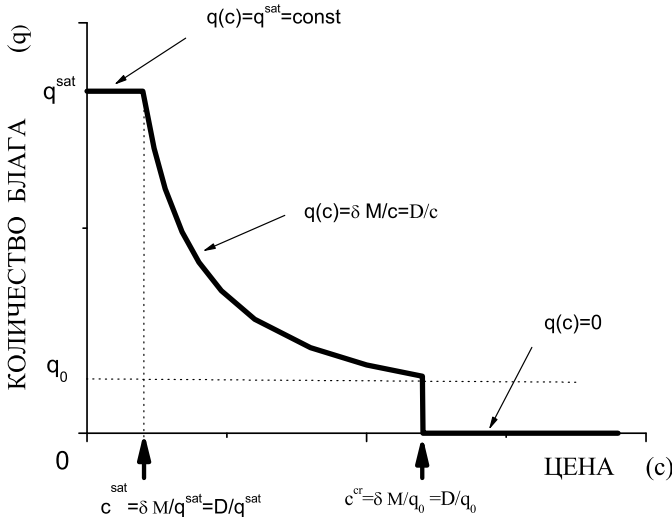


Рис. 1. Кривая индивидуальных покупок конкретного блага

ворения  $k_i$ ), естественно, в пользу более дешевого продукта, предназначенного для удовлетворения той же потребности. Эти соображения дали возможность построить количественную модель эффекта Гиффена [8] (увеличение потребления блага с ростом его цены).

**Функция коллективного спроса (кривая продаж)**

Очевидно, что индивидуальность каждого покупателя формально отображается множеством персонифицированных параметров, перечисленных выше и представленных в (1) и (2). При «агрегировании» покупателей следует учитывать распределения персон по каждому из этих параметров, т. е. рассматривать распределение персон по коэффициентам удовлетворения  $k$ ; распределение персон по уровню нейтрального потребления  $q_0$ ; и распределение персон по доходу  $M$ . Из этих распределений только последнее может рассматриваться как установленное теоретически [1] (логарифмически нормальное распределение) и подтвержденное сравнением с эмпирическими данными [7, 12]. По поводу других распределений достоверная информация отсутствует. Остается использовать предположения.

Начнем с самого простого. Будем считать, что распределения персон по параметрам, определяющим функцию индивидуального потребления – равномерное.

Равномерным будем считать распределение персон по насыщающему количеству блага  $qsat$  с плотностью распределения  $\phi(q^{sat})$ :

$$\phi(q^{sat}) = \begin{cases} \frac{1}{q_2^{sat} - q_1^{sat}} & \text{при } q^{sat} \in [q_1^{sat}, q_2^{sat}]; \\ 0 & \text{при } q^{sat} \notin [q_1^{sat}, q_2^{sat}], \end{cases} \quad (3)$$

где  $q_1^{sat}$  и  $q_2^{sat}$  – граничные значения насыщающего количества блага.

Равномерным будем считать распределение персон по нейтральным уровням потребления  $q_0$  с плотностью распределения  $\phi(q_0)$ :

$$\phi(q_0) = \begin{cases} \frac{1}{q_{02} - q_{01}} & \text{при } q_0 \in [q_1, q_2]; \\ 0 & \text{при } q_0 \notin [q_1, q_2], \end{cases} \quad (4)$$

где  $q_{01}$  и  $q_{02}$  – и граничные значения нейтрального уровня потребления.

Равномерным будем считать распределение персон по выделенным бюджетам на данное благо с плотностью распределения  $\phi(D)$ :

$$\phi(D) = \begin{cases} \frac{1}{D_2 - D_1} & \text{при } D \in [D_1, D_2]; \\ 0 & \text{при } D \notin [D_1, D_2], \end{cases} \quad (5)$$

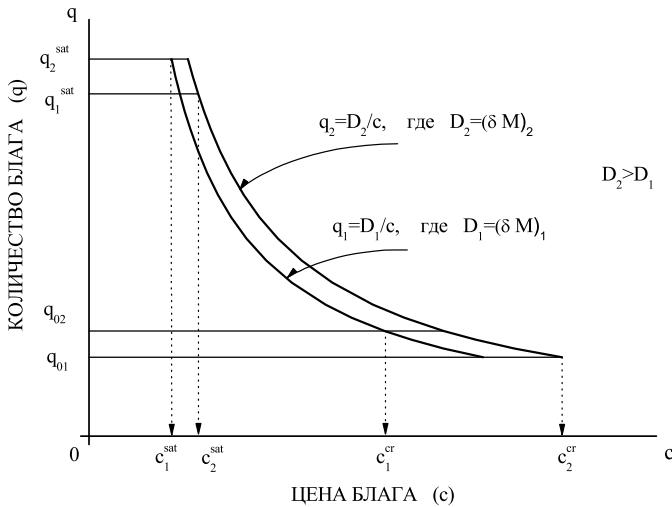
где  $D_1$  и  $D_2$  – граничные значения бюджета на покупку блага.

Существование граничных значений указанных величин дают возможность на графическом поле «цена – количество» четко указать область расположения множества кривых индивидуального потребления. Для этого достаточно указать граничные значения  $q_0$  и фрагменты кривых индивидуального потребления, соответствующие граничным значениям  $q^{sat}$  и  $D$  (рис. 2), на котором указаны также важные для последующего изложения некоторые из характерных значений цен ( $c_1^{sat}$ ,  $c_2^{sat}$ ,  $c_1^{cr}$  и  $c_2^{cr}$ ), при которых имеет место пересечение соответствующих кривых.

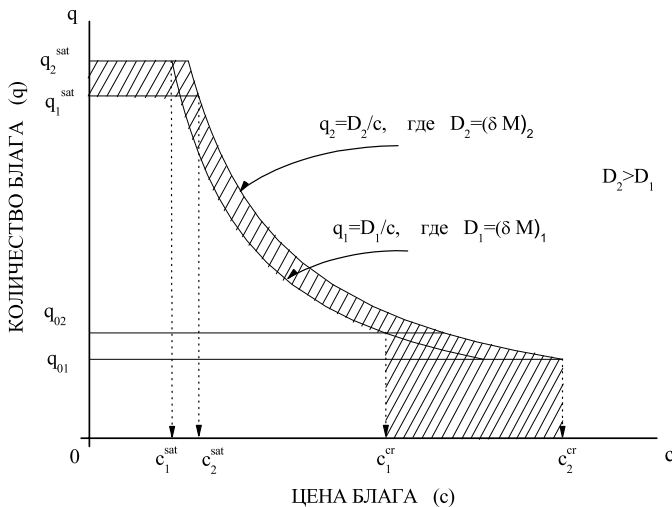
Если рассматривать изменение цены на благо от нуля и далее, то можно сказать следующее.

В интервале  $0 < c < c_1^{sat}$  вне зависимости от цены на благо каждым потребителем покупается его количество  $q^{sat}$ , необходимое для полного удовлетворения его потребности в этом благо (насыщенное потребление). Этот участок персонифицированной кривой индивидуального потребления расположится где-то между прямыми  $q(c) = q_1^{sat}$  и  $q(c) = q_2^{sat}$ .

В интервале цен  $c_1^{sat} \div c_2^{sat}$  происходит переход отдельных покупателей из состояния насыщенного потребления в состояние эластичного потребления. Цена блага, при которой отдельный покупатель переходит к эластичному потреблению, определяется точкой пересечения персонифицированных кривых насыщенного и эластичного потребления. При цене  $c_2^{sat}$



**Рис. 2.** Участки кривых индивидуальных покупок, соответствующие граничным значениям  $q^{sat}$ ,  $D$  и  $q_0$



**Рис. 3.** Область расположения кривых индивидуальных покупок (заштрихована)

все покупатели переходят в состояние эластичного потребления.

В интервале цен  $c_2^{sat} \div c_1^{cr}$  все покупатели находятся в состоянии эластичного потребления. Каждый из них покупает благо в количестве  $q = \frac{D}{c}$ , определяемом не только ценой  $c$ , но и выделенной на покупку суммой денег, которые он расходует целиком.

В интервале цен  $c_1^{cr} \div c_2^{cr}$  происходит отказ отдельных покупателей от потребления блага из-за невозможности купить его в количестве  $q > q_0$ , когда потребление вызывает ощущение удовлетворения. Напомним, что при  $q < q_0$  вместо удовлетворения потребитель ощущает раздражение [9] и поэтому перестает покупать благо.

Если множество кривых индивидуального потребления изобразить на графическом поле

«цена — количество» (рис. 3), то при используемых допущениях о равномерности распределения персон по параметрам  $q^{sat}$ ,  $D$  и  $q_0$  все кривые окажутся в области, которая на рис. 3 заштрихована.

Естественно, что при ценах в интервале  $c_1^{sat} \div c_2^{sat}$  и интервале  $c_1^{cr} \div c_2^{cr}$  кривые индивидуального потребления могут пересекаться друг с другом.

Для получения кривой коллективных покупок (зависимости  $Q(c)$ ), достаточно решить задачу суммирования множества функций индивидуальных покупок, т. е. при каждом значении цены найти сумму:

$$Q(c) = \sum_{i=1}^N q(c), \quad (6)$$

где  $N$  — число покупателей данного блага.

Специфика суммирования в данной задаче состоит в том, что число покупателей данного блага не остается постоянным. По мере возрастания цены при  $c > c_1^{cr}$  оно убывает из-за отказов от потребления. Это означает, что при таких ценах имеем:

$$N = N(c), \text{ причём } \frac{dN}{dc} < 0. \quad (7)$$

При ценах  $c > c_2^{cr}$  покупателей данного блага нет ( $N = 0$ ). Эту ситуация демонстрируется на рис. 4.

Учитывая, что число покупателей данного блага зависит от цены блага, суммирование проведем по отдельным ценовым интервалам, первоначально выбрав те из них, где суммирование не вызывает затруднений (ниже п. 1; п. 2 и п. 3). Другие (ниже п. 4 и п. 5) подробно рассмотрим в последующих наших публикациях.

1. В диапазоне цен ( $0 < c < c_1^{sat}$ ), где число покупателей неизменно ( $N = \text{const}$ ) вне зависимости от цены каждый из покупателей находится в состоянии насыщенного потребления ( $q_i = q_i^{sat}$ ). В результате суммирования (6) получим объем продаж данного блага, обеспечивающий насыщенное потребление всех покупателей

$$Q^{sat} = \sum_{i=1}^N q_i^{sat} = \text{const}. \quad (8)$$

2. В диапазоне цен ( $c_2^{sat} < c < c_1^{cr}$ ) все  $N$  покупателей находятся в состоянии эластичного потребления (2), и каждый покупает благо в количестве:

$$q_i = \frac{\delta_i \cdot M_i}{c} = \frac{D_i}{c}. \quad (9)$$

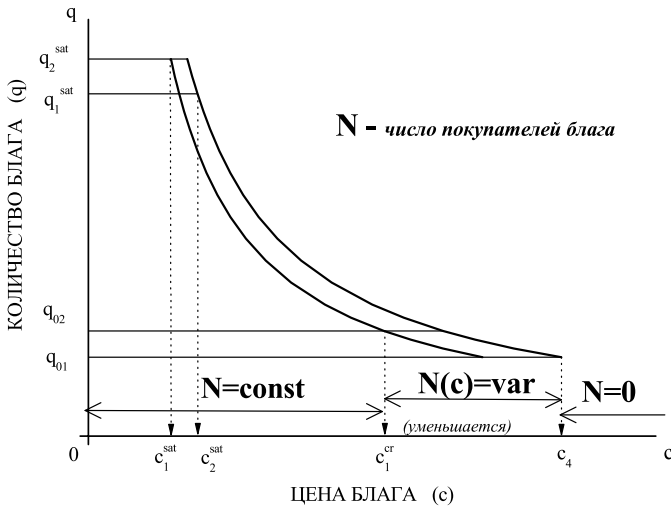


Рис. 4. Число покупателей в разных ценовых диапазонах

В этом диапазоне цен

$$Q = \sum_{i=1}^N \frac{D_i}{c} = \frac{\hat{D}}{c}, \quad (10)$$

где  $\hat{D} = \sum_{i=1}^N D_i$ , его можно называть «бюджет рынка в отношении данного блага». В этом диапазоне цен зависимость количества проданного блага от его цены — гиперболическая. Наклон кривой спроса отрицателен и зависит от цены:

$$\frac{dQ}{dc} = -\frac{\hat{D}}{c^2}. \quad (11)$$

3. В диапазоне цен ( $c > c_2^{sat}$ ) все покупатели перестали покупать данное благо и  $Q = 0$ .

4. В диапазоне переходных цен ( $c_1^{sat} < c < c_2^{sat}$ ) доход ( $M$ ) некоторых из покупателей и их предпочтения оказываются такими, что не реализуется их насыщенное потребление. Эта часть покупателей переходят в состояние эластичного потребления. В этом — переходном — интервале цен строгое решение задачи суммирования с учетом распределения персон по соответствующим параметрам сопряжено со значительными трудностями математического содержания.

Будем соизмерять значимость ожидаемых результатов и затрачиваемые усилия. В рамках данной работы не будем стремиться к установлению вида этой функциональной зависимости, поскольку наш интерес к этому диапазону цен может быть чисто академическим, не имеющим отношения к интересующей нас в первую очередь проблеме количественного описания взаимодействия покупателей и продавцов.

5. В этом отношении наибольший интерес представляет диапазон переходных цен  $c_1^{cr} < c < c_2^{cr}$ , при которых происходит переход

отдельных покупателей от эластичного потребления к полному отказу от покупок данного блага. В этом диапазоне цен, в отличие от рассмотренных выше, число покупателей данного блага непостоянно и уменьшается от  $N$  до нуля (7). Это обстоятельство не позволяет получить аналитическое выражение для этого участка кривой коллективных покупок  $Q(c)$ .

Для решения этой задачи первоначально необходимо установить зависимость числа остающихся на рынке покупателей, т. е. найти  $N(c)$  и произвести необходимые расчеты исходя из того, что:

$$Q(c) = \sum_{i=1}^{N(c)} q(c). \quad (12)$$

Очевидно, что, исходя из требования непрерывности искомой функции  $Q(c)$ , она должна обладать следующими свойствами, обеспечивающими «сшивку» ее участков на границах ценовых диапазонов.

На границах диапазона  $c_1^{sat} \leq c \leq c_2^{sat}$ , т. е. при  $c = c_1^{sat}$  и  $c = c_2^{sat}$  должно выполняться, соответственно:

$$Q(c_1^{sat}) = Q^{sat} \text{ и } \left. \frac{dQ}{dc} \right|_{c=c_1^{sat}} = 0 \quad (13)$$

и

$$Q(c_2^{sat}) = \frac{\hat{D}}{c_2^{sat}} \text{ и } \left. \frac{dQ}{dc} \right|_{c=c_2^{sat}} = -\frac{\hat{D}}{(c_2^{sat})^2}. \quad (14)$$

На границах диапазона  $c_1^{cr} \leq c \leq c_2^{cr}$ , т. е. при  $c = c_1^{cr}$  и  $c = c_2^{cr}$  должно выполняться, соответственно:

$$Q(c^{cr}) = \frac{\hat{D}}{c^{cr}} \text{ и } \left. \frac{dQ}{dc} \right|_{c=c_1^{cr}} = -\frac{\hat{D}}{(c_1^{cr})^2} \quad (15)$$

и

$$Q(c_2^{cr}) = 0 \text{ и } \left. \frac{dQ}{dc} \right|_{c=c_2^{cr}} = 0. \quad (16)$$

Отметим, что если принять указанные выше плотности распределения персон не равномерными, а треугольными (распределения Симпсона), когда тоже можно говорить о граничных значениях соответствующих величин, получим аналогичные результаты. В других случаях, например для нормального распределения Гаусса, точных граничных значений цен  $c^{sat}$  и  $c^{cr}$  указать невозможно. В этих случаях можно будет говорить лишь о характерных ценах, при которых функция  $\frac{dQ(c)}{dc}$  отклоняется

от зависимости (11) на некоторую величину,

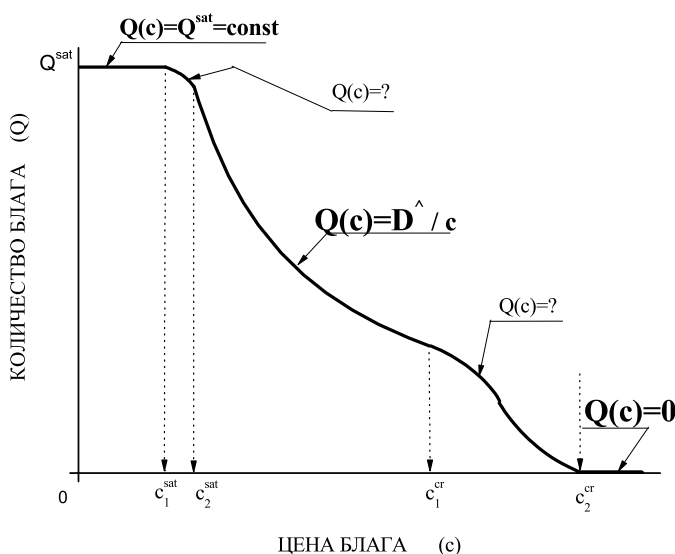


Рис. 5. Кривая коллективного спроса на благо

естественно, указав количественные критерии для этих отклонений.

Сказанное выше дает возможность схематически представить кривую коллективного спроса на благо кусочно (рис. 5), указав вид аналитической зависимости для трех из пяти ценовых диапазонов.

#### Список источников

1. Айвазян С. А. Моделирование семейных доходов // Экономика и математические методы. — М.: Наука, 1970. — Т. 6. — Вып. 2 — С. 288-296.
2. Горбунов В. К. Модель экономики с обобщенным рыночным спросом и единственным равновесием // Журнал экономической теории. — 2012. — №4. — С. 18-28.
3. Горбунов В. К. Обобщенная модель потребительского спроса и выявленное предпочтение // Труды Средневолжского математического общества. — 2007. — №2. — Т. 9.
4. Горбунов В. К. Особенности агрегирования потребительского спроса // Журнал экономической теории. — 2009. — № 1. — С. 85-94.
5. Горбунов В. К., Ледовских А. Г. Построение дифференцируемых функций полезности по торговой статистике // Методы оптимизации и их приложения : труды XV Байкальской международной школы-семинара. — Иркутск: РИО ИДСТУ СО РАН, 2011. — Т. 6.
6. Горбунов В. К., Ледовских А. Г. Построение поля потребительских предпочтений по торговой статистике // Журнал Средневолжского математического общества. — Саранск: СВМО, 2010. — Т. 12. — № 4.
7. Дмитриев А. Г., Козелецкая Т. А. Полезность потребления конкретного блага, как случайная величина. Распределение персон по доходам // Экономика, экология и общество России в 21 столетии. Труды 6-й международной научно-практической конференции 18-20 мая 2004 г. Ч. 3. — СПб.: Изд-во Нестор, 2004. — С. 162-166.
8. Дмитриев А. Г., Козелецкая Т. А., Герман Е. А. Теория потребительского спроса. Кривая индивидуального спроса и эффект Гиффена // Журнал экономической теории. — 2010. — № 2. — С. 134-139.
9. Дмитриев А. Г., Козелецкая Т. А., Герман Е. А. Теория потребительского спроса. Психологическое обоснование дифференциального уравнения кардиналистской полезности // Журнал экономической теории. — 2011. — №1. — С. 111-117.
10. Дмитриев А. Г., Козелецкая Т. А., Герман Е. А. Теория потребительского спроса. Функции расходов на удовлетворение конкретной потребности взаимозаменяемыми благами разного качества // Журнал экономической теории. — 2013. — №1. — С. 126-131.
11. Карелина И. Г. Математические модели микроэкономики. — Воронеж: Изд. ВГУ, 2001. — 38 с.
12. Козелецкая Т. А. Модели экономического поведения индивида: дисс. ... канд. экон. наук. — СПб.: Санкт-Петербургский политехн. ун-т, 2005. — 159 с.
13. Хикс Дж. Р. Стоимость и капитал: пер. с англ. / Общ. ред и вступ. ст. Р. М. Энтова. — М.: Прогресс, 1993. — 488 с. (Экономическая мысль Запада).
14. Gorman W. M. Community preference fields. // Econometrica. — 1953. — V. 21. — No.1
15. Stouin R. Mathematical Models of the Economy and Other Essays. — London, Chapman & Hall, 1970. — 335 с.

#### Заключение

Подводя итог сказанному, обратим внимание на важное, по нашему мнению, обстоятельство.

Если рассматривать взаимодействие конкретного продавца товара с множеством покупателей этого товара, то в диапазоне цен эластичного потребления ( $c_2^{sat} < c < c_1^{cr}$ ) для любой точки на кривой коллективных покупок произведение проданного количества блага ( $Q$ ) на его цену ( $c$ ) не зависит от цены продажи ( $Q \cdot c = \frac{\hat{D}}{c} \cdot c = \hat{D}$ ). Для продавца это произведение представляет собою доход от продаж данного блага, который, как видим, не зависит от цены блага. На этом основании этот участок кривой коллективных покупок можно считать кривой безразличия продавца по доходу.

Высказанные соображения, мы полагаем, открывают новые возможности для анализа механизмов ценообразования без использования небесспорной концепции равновесия.

**УДК 51-7**

**Ключевые слова:** спрос, количественный подход, математические модели поведения покупателей, агрегирование покупателей, функция продаж