ЭЛАСТИЧНОСТЬ ПРОИЗВОДСТВЕННОЙ ФУНКЦИИ И ОПТИМАЛЬНЫЙ ОБЪЕМ ПРОИЗВОДСТВА

С. М. Коломиец

Производственная функция, эластичность которой с увеличением объема используемого ресурса убывает от значения, большего единицы, до значения, меньшего единицы, естественным образом описывает эволюцию реальных экономических систем с точки зрения максимизации прибыли. Если эластичность производственной функции больше единицы, то выгодной является концентрация производства. Если же эластичность производственной функции меньше единицы, то выгодной оказывается деконцентрация производства. При объеме ресурса, близком к значению, при котором эластичность равна единице, обеспечивается максимум нормы прибыли обособленного производства. При этом суммарная прибыль слабо зависит степени концентрации производства, что характеризует устойчивость состояния экономической системы.

Введение

Во многих экономико-математических моделях широко используются производственные функции, характеризуемые, как правило, постоянной эластичностью [1, 3]. Если эта эластичность меньше единицы, то функция прибыли одной переменной (объема одного вида ресурса) имеет локальный максимум. Если эластичность производственной функции больше единицы, то ситуация иная — прибыль монотонно возрастает при увеличении объема ресурса. Обычно полагают, что производственный процесс осуществляется таким образом, что полученная прибыль относится ко всему объему ресурса в целом, без разделения на составные части (прибыль, как и объем ресурса, является единой и неделимой). Например, однотипная продукция производится только одним цехом некоторого предприятия, причем весь доступный ресурс используется именно этим цехом. В то же время во многих случаях возможна такая организация производства, как, например, выпуск однотипной продукции несколькими цехами, работающими независимо друг от друга. Тогда доступный объем ресурса разделяется на составные части и распределяется между соответствующими цехами. В этих случаях прибыль (как и ресурс), по сути, является составной, делимой. Точно так же могут возникнуть вопросы объединения (концентрации) производства. В связи с этим важно знать, как соотносятся между собой сумма прибылей от каждой из составных частей доступного объема ресурса и прибыль от суммарного объема этих частей, рассматриваемого как целое.

Производственные функции с постоянной эластичностью удовлетворительного ответа на этот вопрос не дают. Предположение о неизменности эластичности может быть справедливо лишь в сравнительно небольшом диапазоне изменения ресурсов. Однако при заметном изменении объемов ресурсов во многих случаях изменяются используемые технологии, а следовательно, меняется и вид производственной функции, меняется ее эластичность. В рамках новой теории экономических систем говорится о необходимости «разработки методологии построения основной и дополнительной производственных функций экономических систем» [2]. По-видимому, эта методология должна также учитывать и зависимость эластичности производства от объема используемых ресурсов [5].

Цель данной работы — выявление связи между эластичностью производственной функции и объемом производства, оптимальным с точки зрения существующих тенденций к максимизации прибыли — как неделимой, так и делимой.

Производственная функция и экстремумы функции прибыли

Рассмотрим широко используемую во многих экономико-математических моделях одноресурсную функцию прибыли $y(x)$ следующего вида:

$$y(x) = f(x) - Cx. \qquad (1)$$

Здесь $f(x)$ — производственная функция, определяющая зависимость объема производства от объема используемого ресурса x. Неявно полагается, что вся произведенная продукция может быть реализована по одной и той же цене, так что $f(x)$ может рассматриваться как доход, пропорциональный объему производства. Кроме того, полагается, что $f(0) = 0$; $f(x)$, $f'(x) \geq 0$. C есть цена единицы ресурса, так что Cx — линейная функция расходов — суммарные расходы на весь используемый объем ресурса x.

Эластичность E_f производственной функции определяется соотношением:

$$E_f = \frac{df}{dx}\frac{x}{f}. \qquad (2)$$

Если ресурс x представляет собой объем трудовых ресурсов, то f/x и f' называют в экономике средней и предельной производительностью труда соответственно. Если ресурс x представляет собой объем фондов, то f/x и f' называют средней и предельной фондоотдачей соответственно. Не конкретизируя сущности ресурса, по аналогии будем называть f/x и f' средней и предельной ресурсоотдачей (по производству). Тогда эластичность E_f есть отношение предельной ресурсоотдачи к средней ресурсоотдаче.

Эластичность E_y функции прибыли (1) имеет следующий вид:

$$E_y = \frac{dy}{dx}\frac{x}{y} = \frac{f'x - Cx}{y} = \frac{E_f f - Cx}{y} = 1 + (E_f - 1)\frac{f}{y}.$$

Здесь y/x и y' можно назвать средней и предельной ресурсоотдачей по прибыли.

Между E_y и E_f существует важное соотношение:

$$y(E_y - 1) = f(E_f - 1). \qquad (3)$$

Из (3) видно следующее:

— Если $y \neq 0$; $f \neq 0$; $E_f = 1$; то и $E_y = 1$ — то есть для обеих функций эластичность равна единице в одной и той же точке (в одних и тех же точках).

— Пусть $y > 0$. Тогда $E_y > 1$, если $E_f > 1$; $E_y < 1$, если $E_f < 1$.

— Пусть $y < 0$. Тогда $E_y > 1$, если $E_f < 1$; $E_y < 1$, если $E_f > 1$.

— Пусть $y = 0$ в некоторой точке $x = x^*$. Тогда эластичность $E_y(x^*)$ в этой точке в общем случае не определена. В частности, $E_y(x^*) = \propto$, если $E_f(x^*) \neq 1$.

Найдем производную функции прибыли:

$$f'(x) = f'(x) - C = \frac{E_f f - Cx}{x} = \frac{(E_f - 1)f + y}{x}. \qquad (4)$$

В точках экстремумов (если таковые имеются), очевидно, $y' = 0$, то есть, должно выполняться необходимое условие наличия экстремума: $E_f = 1 - \frac{y}{f}$. Но $f(x) > 0$ при $x > 0$. Поэтому если $y > 0$, то $E_f < 1$; если же $y < 0$, то $E_f > 1$.

Найдем теперь вторую производную $y''(x)$, исходя из (4).

$$y''(x) = \frac{f}{x^2}[E_f' x + E_f(E_f - 1)]. \qquad (5)$$

В различных экономико-математических моделях обычно рассматривают случай неизменной эластичности производственной функции, $E_f = \text{const}$ [1, 3, 5]. Отметим, что при этом, как видно из (2), эластичность функции прибыли отнюдь не является неизменной, $E_y = E_y(x)$.

Из (5) видно, что $y''(x) > 0$, если $E_f = \text{const} > 1$. В этом случае $y(x)$ может иметь единственный экстремум — минимум (при $y < 0$). Если же $E_f < 1$, то $y''(x) < 0$. В этом случае $y(x)$ может

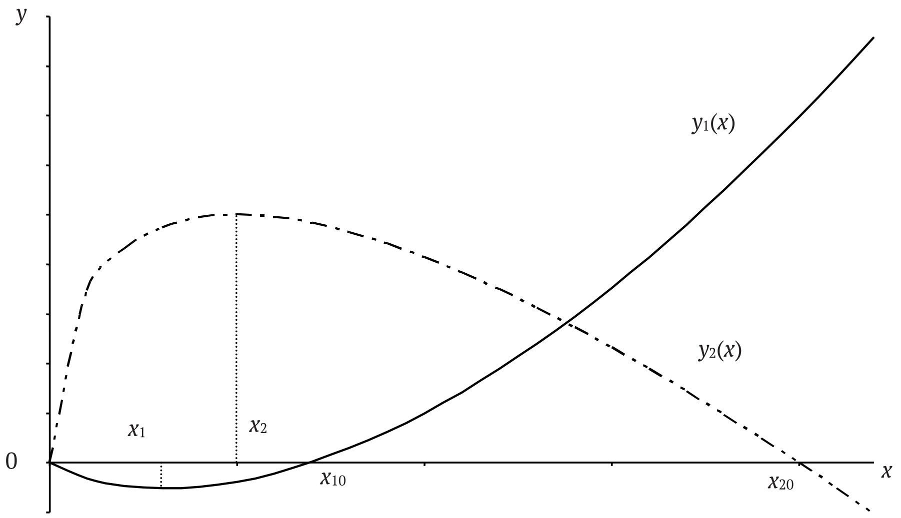

Рис. 1. *Функция прибыли: $y_1(x)$ — для $E_f > 1$; $y_2(x)$ — для $E_f < 1$*

иметь единственный экстремум — максимум (при $y > 0$).

Если $E_f = \text{const}$, то (2) представляет собой простое дифференциальное уравнение, решение которого имеет степенной вид: $f(x) \sim xE_f$. В этом случае производственная функция является однородной, причем степень однородности равна эластичности E_f.

Если $E_f = 1$, как нетрудно видеть, $f(x) \sim x$, то есть, производственная функция, как и функция расходов, линейно зависит от x.

Случаи $E_f > 1$ и $E_f < 1$ заметно отличаются друг от друга. Поэтому положим, что для первого случая $E_f = \alpha_1$ ($\alpha_1 > 1$); $y_1(x) = C_1x^{\alpha_1} - Cx$. Для второго случая $E_f = \alpha_2$ ($0 < \alpha_2 < 1$); соответственно, $y_2(x) = C_2x^{\alpha_2} - Cx$. Здесь C_1, C_2 — численные коэффициенты, зависящие, в частности, от цены продукции.

Графики функций $y_1(x)$, $y_2(x)$ представлены на рисунке 1.

Видно, что функция прибыли $y_1(x)$ имеет единственный экстремум — минимум при некотором значении $x = x_1 = (\frac{C}{\alpha_1 C_1})^{\frac{1}{\alpha_1 - 1}}$, причем $y_1(x_1) < 0$. Функция $y_2(x)$ имеет единственный экстремум — максимум при некотором значении $x = x_2 = (\frac{\alpha_2 C_2}{C})^{\frac{1}{1-\alpha_2}}$, причем $y_2(x_2) > 0$.

Итак, функция прибыли может иметь максимум только в случае $E_f < 1$. Вначале прибыль растет с увеличением x, затем, после прохождения точки $x = x_2$, прибыль начинает уменьшаться и, наконец, при $x > x_{20} = (\frac{C_2}{C})^{\frac{1}{1-\alpha_2}}$ прибыль становится отрицательной (производство становится убыточным). Другими словами, значение $x = x_2$ (при котором достигается максимум прибыли) есть не что иное, как оптимальный объем использования ресурса. Если же $E_f > 1$, то ситуация иная. В этом случае производство является убыточным при малых объемах использования ресурса ($x < x_{10}$), причем убытки максимальны (прибыль минимальна) при $x = x_1$. То есть для организации рентабельного производства необходим объем ресурса $x > x_{10} = (\frac{C}{C_1})^{\frac{1}{\alpha_1 - 1}}$ (необходим соответствующий стартовый капитал, превосходящий величину Cx_{10}). При дальнейшем увеличении x ($x > x_{10}$) прибыль возрастает — с формальной точки зрения неограниченно.

Одно из требований к неоклассическим производственным функциям состоит в том, что функция $f(x)$ должна быть вогнутой [3]. По сути, это означает, что $f''(x) < 0$ и, соответственно, $E_f < 1$. В этом случае выполняется закон убывающей отдачи — предельная ресурсоотдача f' уменьшается с увеличением объема использования ресурса.

Для случая $E_f > 1$ закон убывающей отдачи, очевидно, не выполняется. Однако этот закон, подтверждающийся многочисленными экономическими исследованиями, по своему смыслу относится к случаю больших значений ресурса x, когда вступают в силу различные ограничения, в том числе ограничения объема рынка. То есть, лишь при больших объемах производства является обоснованным требование $E_f < 1$.

С другой стороны, для случая $E_f > 1$ характерно, с одной стороны, неограниченное возрастание прибыли при неограниченном возрастании x, а с другой стороны — необходимость стартового капитала. По-видимому, этот случай может соответствовать ситуациям при сравнительно небольших объемах производства.

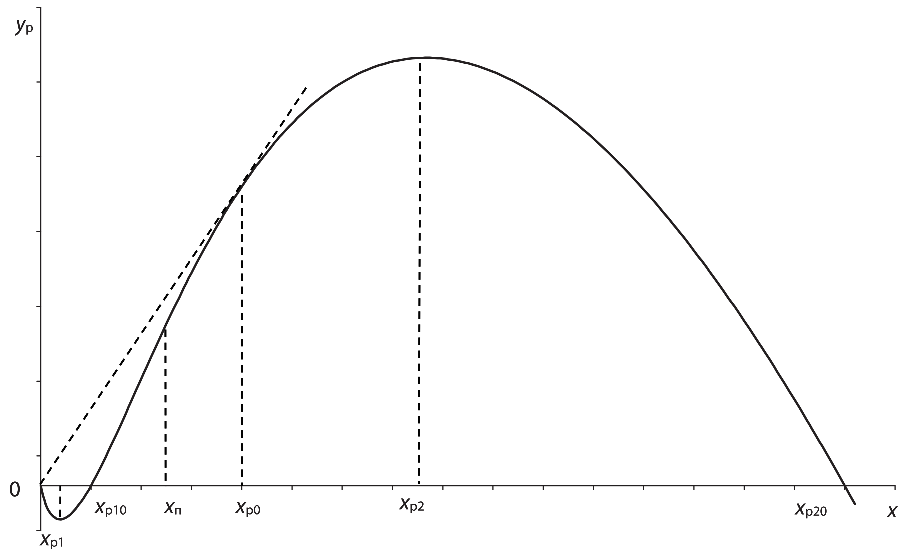

Рис. 2. *Функция прибыли для производственной функции с переменной эластичностью*

Соответственно, в случаях, рассматривающих широкий диапазон изменений ресурса x, необходимо учитывать переменность эластичности производственной функции: $E_f > 1$ при малых x, и $E_f < 1$ при больших x [5].

Рассмотрим функцию прибыли $y_p(x) = f_p(x) - Cx$, где производственная функция $f_p(x)$ представляет собой простую комбинацию степенных функций:

$$f_p(x) = \frac{x}{Ax^{\alpha} + Bx^{-\alpha}} = \frac{x^{1+\alpha}}{Ax^{2\alpha} + B}. \qquad (6)$$

Здесь A и B — численные коэффициенты, α — параметр, определяющий диапазон изменения эластичности ($0 < \alpha < 1$).

Для (6) нетрудно найти эластичность E_f:

$$E_f = 1 - a\frac{Ax^{2\alpha} - B}{Ax^{2\alpha} + B}. \qquad (7)$$

Если $x^{2\alpha} << B/A$, то $f_p(x) \approx x^{1+\alpha}/B$. При этом $E_f = 1 + \alpha > 1$.

Если $x^{2\alpha} = B/A$, то $f_p(x) = \frac{1}{2}(\frac{B^{1-\alpha}}{A^{1+\alpha}})^{\frac{1}{2\alpha}}$. При этом $E_f = 1$.

Если $x^{2\alpha} >> B/A$, то $f_p(x) \approx x^{1-\alpha}/A$. При этом $E_f = 1 - \alpha < 1$.

Если $4ABC^2 < 1$, то $y_p(x) > 0$ в некотором интервале значений x, при этом график $y_p(x)$ имеет вид, представленный на рис. 2. Качественно этот же вид функция прибыли может иметь и в общем случае, когда эластичность E_f с увеличением объема используемого ресурса монотонно убывает от значения, большего единицы, до значения, меньшего единицы. Отметим, что график, сходный с графиком $y_p(x)$, может быть достаточно просто составлен из графиков $y_1(x)$, $y_2(x)$, представленных на рис. 1.

При малых объемах ресурса прибыль y_p вначале убывает с увеличением объема ресурса, являясь отрицательной и достигая локального минимума в некоторой точке x_{p1}. При дальнейшем увеличении объема y_p начинает возрастать, и, наконец, становится положительной при $x > x_{p10}$. При дальнейшем увеличении объема ресурса функция прибыли по-прежнему возрастает, достигая локального максимума в некоторой точке x_{p2}, после чего монотонно убывает и вновь становится отрицательной при $x > x_{p20}$.

Как видно из рис. 2, касательная в точке $y_p(x_{p0})$ проходит через начало координат, т. е. $E_y(x_{p0}) = E_f(x_{p0}) = 1$. Тогда из (7) следует, что $x_{p0}^{2\alpha} = B/A$. При этом $E_f > 1$, если $x < x_{p0}$; $E_f < 1$, если $x > x_{p0}$.

Функция прибыли y_p, как и производственная функция $f_p(x)$, имеет точку перегиба при некотором значении $x_п$, причем $y_p''(x_п) = f_p''(x_п) = 0$. При этом $x_{p10} < x_п < x_{p0}$.

Итак, в случае переменной эластичности (7) производственной функции функция прибыли достигает локального минимума в некоторой точке $x = x_{p1}$, причем $E_f(x_{p1}) > 1$. Для перехода к безубыточному производству необходимо преодоление некоторого потенциального барьера, то есть необходим минимальный объем ресурса $x > x_{p10}$ (необходим соответствующий стартовый капитал). При этом $E_f(x_{p10}) > 1$. Функция прибыли достигает локального максимума в некоторой точке x_{p2}, причем $E_f(x_{p2}) < 1$. Значение $x = x_{p2}$ представляет собой объем производства, оптимальный с точки зрения максимизации прибыли.

В экономической теории выделяют следующие четыре этапа жизненного цикла любого товара: выведение на рынок, рост, зрелость и упадок.

По аналогии с этим, исходя из поведения функции прибыли в зависимости от объема используемого ресурса, можно условно выделить четыре состояния экономической системы.

1. Зарождение (возникновение): $x \leq x_{p10}$.
2. Рост (прогресс): $x_{p10} < x < x_{p2}$.
3. Зрелость (устойчивость): $x \approx x_{p2}$.
4. Упадок (регресс): $x_{p2} < x < x_{p20}$.

Состояние $x \geq x_{p20}$, очевидно, практического интереса не представляет.

Эластичность и аддитивность функции. Эффект масштаба

Выше при анализе функции прибыли на максимум (минимум) неявно полагалось, что прибыль, соответствующая некоторому объему ресурса, является неделимой, поскольку весь ресурс используется полностью в едином технологическом процессе (грубо говоря, ресурс является неделимым) — например, в случае использования всего объема ресурса только одним цехом некоторого предприятия.

В то же время, во многих случаях прибыль может рассматриваться как делимая, составная, например, в случае разделения всего объема ресурса между несколькими обособленными цехами, самостоятельно выпускающими аналогичную продукцию. В этом случае практический интерес представляет структура обособленного производства, то есть пропорции деления общего объема ресурса, обеспечивающие максимальную суммарную прибыль.

Пусть задан некоторый объем ресурса x_m, причем этот объем разделен на несколько равных частей x^* (таких частей будет x_m/x^*). Суммарная прибыль y_s будет иметь вид: $y_s(x^*) = (x_m/x^*)y(x^*) = x_m\, y_u(x^*)$. Здесь $y_u(x) \equiv y(x)/x$ средняя ресурсоотдача по прибыли, которая может рассматриваться как удельная прибыль, то есть, прибыль от единицы объема ресурса.

Отметим, что для рассматриваемого случая одна из важных экономических характеристик — норма прибыли n_y — пропорциональна удельной прибыли:

$$n_y \equiv \frac{y(x)}{Cx} = y_u(x).$$

Итак, в данном случае для максимизации суммарной прибыли от всех составляющих заданного объема ресурса следует найти максимум удельной прибыли $y_u(x)$ или, что то же самое, максимум нормы прибыли n_y.

Найдем производную y_u' с учетом (4):

$$y_u' = \left(\frac{y}{x}\right)' = \frac{y'x - y}{x^2} = \frac{y}{x^2}\left(\frac{y'}{y}x - 1\right) =$$
$$= \frac{y}{x^2}(E_y - 1) = \frac{f}{x^2}(E_f - 1). \qquad (8)$$

Если $E_f > 1$, то удельная прибыль (как и норма прибыли) возрастает с увеличением x. Если же $E_f < 1$, то удельная прибыль (как и норма прибыли) убывает с увеличением x. Соответственно, экстремум удельной прибыли, как и нормы прибыли, возможен только при $E_f = 1$. При этом, очевидно, экстремум является локальным максимумом/минимумом, если $E_f(x)$ — убывающая/возрастающая функция.

В свою очередь, эластичность функции тесно связана аддитивностью и эффектом масштаба.

Функцию $f(x)$ называют супераддитивной, если $f(x_1 + x_2) \geq f(x_1) + f(x_2)$, и субаддитивной, если $f(x_1 + x_2) \leq f(x_1) + f(x_2)$ [3]. При этом для первого случая $E_f \geq 1$, а для второго — $E_f \leq 1$. Действительно, если $E_f > 1$, то $y''(x) > 0$, соответственно, график функции обращен выпуклостью вниз. Если же $E_f \leq 1$, то $y''(x) < 0$, соответственно, график функции обращен выпуклостью вверх. Из простых геометрических соображений ясно, что в первом случае функция является супераддитивной, а во втором — субаддитивной. Знак равенства соответствует только линейной функции: $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$.

С другой стороны, разложим функцию $f(x + dx)$ в ряд в окрестности точки x: $f(x + dx) \approx \approx f(x) + f'(x)dx$ и сравним результат с суммой $f(x) + f(dx) \approx f(x) + f'(0)dx$. Нетрудно видеть, что $f(x + dx) \geq f(x) + f(dx)$, если $f'(x) \geq f'(0)$, то есть, $y''(x) > 0$ и, соответственно, $E_f \geq 1$. Если же $E_f \leq 1$, то $y''(x) < 0$; $f'(x) \leq f'(0)$, соответственно, $f(x + dx) \leq f(x) + f(dx)$.

Другими словами, для супераддитивной (субаддитивной) функции целое больше (меньше) суммы слагаемых. Для линейной же функции, очевидно, целое равно сумме слагаемых.

Выше рассматривалась некоторая функция $f(x) \geq 0$ (производственная функция). Однако функция прибыли $y(x)$ при некоторых значениях аргумента может быть и отрицательной, $y(x) < 0$. В этом случае $y(x_1 + x_2) \geq y(x_1) + y(x_2)$, если $E_y \leq 1$ ($Ef \geq 1$); $y(x_1 + x_2) \leq y(x_1) + y(x_2)$, если $E_y \geq 1$ ($E_f \leq 1$). Другими словами, поскольку функция расходов Cx линейна, то характер функции прибыли (независимо от знака) целиком определяется характером производственной функции: если последняя супераддитивна, $E_f \geq 1$ (субаддитивна, $E_f \leq 1$), то и функция прибыли супераддитивна (субаддитивна).

Разность $\Delta y \equiv y(x_1 + x_2) - [y(x_1) + y(x_2)]$ можно назвать эффектом прибыли: если $\Delta y \geq 0$, то эффект положителен; если же $\Delta y \leq 0$, то эффект отрицателен.

Здесь можно провести аналогию с «дефектом масс» в физике, понимаемым как разность между массой (суммарной) ядра атома некоторого химического элемента и суммой масс нуклонов, входящих в состав данного ядра. Дефекту масс пропорциональна так называемая энергия связи физической системы.

Если задан объем ресурса x_s, то есть, $x_1 + x_2 = x_s$, тогда $x_2 = x_s - x_1$. Без нарушения общности примем для определенности, что $x_1 = x$; $0 \leq x \leq x_s/2$; $x_s/2 \leq x_s - x \leq x_s$. Тогда $\Delta y \equiv y(xs) - [y(x) + y(xs - x)] = f(xs) - [f(x) + f(xs - x)]$.

Нетрудно видеть, что $(\Delta y)' = f'(x) - f'(x_s - x)$.

Если эластичность производственной функции зависит от ресурса ($E_f \neq \text{const}$), то сделанные выше выводы справедливы лишь для тех диапазонов изменения ресурса, в которых значение E_f не переходит через единицу: $E_f > 1$ ($E_f < 1$) для всех значений x_1, x_2, $x_1 + x_2$. В противном случае необходим учет конкретных условий.

С понятиями супераддитивности и субаддитивности тесно связано понятие эффекта масштаба [1].

Пусть k — некоторый численный коэффициент, определяющий увеличение объема (масштаба) используемого ресурса, $k > 1$. Если $f(kx) > kf(x)$, то говорят о положительном эффекте (положительной отдаче) от масштаба — в этом случае $f(x)$ увеличивается быстрее, чем увеличивается x. Соответственно, если $k < 1$, то $f(kx) < kf(x)$. Если же $f(kx) < kf(x)$ при $k > 1$, то говорят об отрицательном эффекте (отрицательной отдаче) от масштаба — в этом случае $f(x)$ увеличивается медленнее, чем увеличивается x. Соответственно, если $k < 1$, то $f(kx) > kf(x)$. И, наконец, если $f(kx) = kf(x)$, то говорят о постоянной отдаче от масштаба.

Нетрудно видеть, что супераддитивной функции соответствует положительный эффект от масштаба, а субаддитивной функции — отрицательный эффект. В частности, пусть $k = 1 + \beta$, $\beta << 1$. Тогда $f(kx) = f[(1 + \beta)x] \approx \approx f(x) + f'(x)\beta x = f(x) + f(x)E_f\beta = (1 + E_f\beta)f(x)$. Очевидно, если $E_f > 1$, то $f[(1 + \beta)x] > (1 + \beta)f(x)$; если же $E_f < 1$, то $f[(1 + \beta)x] < (1 + \beta)f(x)$. Отметим, что в данном случае мы рассматриваем производную $f'(x)$ в точке x, в то время как при анализе аддитивности рассматривалась производная $f'(0)$ в точке $x = 0$.

В случае переменной эластичности производственной функции сделанные выше выводы справедливы лишь для тех диапазонов изменения ресурса, в которых значение E_f не переходит через единицу, то есть, $E_f > 1$ ($E_f < 1$) для всех значений x, kx. В противном случае необходим учет конкретных условий.

Рассмотрим теперь случай $E_f = \alpha_2$ ($0 < \alpha_2 < 1$), когда функция прибыли $y_2(x)$ имеет максимум в обычном понимании неделимой прибыли (рис. 1). Положим заданной величиной объем ресурса $x = x_2 = (\frac{\alpha_2 C_2}{C})^{\frac{1}{1-\alpha_2}}$. При разделении x_2 на n равных частей ($n > 1$), как можно видеть, суммарная прибыль $y_s(x_2/n) = n_y(x_2/n) > y(x_2)$, при этом чем больше n, тем сильнее неравенство. Естественно, это неравенство будет иметь место и при $x \neq x_2$.

То есть суммарная прибыль, получаемая при разделении ресурса x на несколько частей, оказывается большей, чем прибыль при использовании того же ресурса как единого целого (неделимого).

Рассмотрим функцию прибыли конкретного вида, например, $y = x^{1/2} - x$. Эта функция имеет максимум при $x = x_2 = 0{,}25$, причем $y(0{,}25) = 0{,}25$. Положим теперь, что ресурс поделили пополам, и каждую из половин использовали по назначению независимо друг от друга. Суммарная прибыль y_s будет иметь вид: $y_s(x_2/2) = y_s(0{,}125) = 2y(0{,}125) \approx 0{,}46$. При этом $y_s(x_2/2)/y(x_2) \approx 1{,}83$. То есть, разделение (раздробление) производства привело к возрастанию суммарной прибыли на 80% по сравнению со случаем оптимальной прибыли. Если же ресурс перед использованием поделить на три равных части ($0{,}25/3 \approx 0{,}083$), то получим еще больший выигрыш: $y_s(x_2/3)/y(x_2) \approx 2{,}47$.

Рассмотрим теперь функцию прибыли y_p, представленную на рис. 2. Из графика этой функции следует, что $2y_p(x_{p2}/2)/y_p(x_{p2}) \approx 1{,}3$. То есть в данном случае разделение производства на две равные части приводит к возрастанию суммарной прибыли на 30% по сравнению со случаем оптимальной прибыли. Отметим, что для представленной на рис. 2 функции прибыли $x_{p2}/2 < x_{p0}$, то есть, выбранные равные части объема ресурса оказались меньше тех, которые обеспечили бы максимизацию удельной прибыли. По сути, эта максимизация может быть достигнута лишь при $x_{p2} >> x_{p0}$. В противном случае необходимо особое рассмотрение, основанное на разделении объема ресурса на неравные части. Так, если объем разделить на две части: x_{p0}, $x_{p2} - x_{p0}$, то получим: $[y_p(x_{p0}) + y_p(x_{p2} - x_{p0})]/y_p(x_{p2}) \approx 1{,}2$. То есть в данном случае суммарная прибыль уменьшилась по сравнению со случаем деления объема ресурса на равные части $x_{p2}/2$. В то же время, в каких-то других случаях может оказаться выгодным деление на неравные части.

Выше рассматривалось деление на две части, поскольку $x_{p2}/2 \cong x_{p0}$. Очевидно, деление на три части приведет к уменьшению суммарной прибыли. Действительно, $3y_p(x_{p2}/3)/y_p(x_{p2}) \approx 1{,}05$.

Итак, если $E_f > 1$, выгодным оказывается объединение ресурсов (концентрация производства). По аналогии с механикой можно сказать, что в данном случае проявляются центростремительные тенденции. Если же $E_f < 1$, то экономически выгодным оказывается разделение ресурсов (деконцентрация производства) — появляются центробежные тенденции.

Другими словами, эластичность производственной функции является индикатором центробежных (центростремительных) тенденций в экономической системе.

Эластичность производственной функции и состояния экономической системы

С точки зрения экономики внутренние силы, приводящие к возможной эволюции экономической системы, обусловлены стремлением к максимизации полной прибыли. Можно вспомнить известные слова К. Маркса: «Обеспечьте 10% прибыли, и капитал согласен на всякое применение, при 20% он становится оживлённым, при 50% положительно готов сломать себе голову, при 100% он попирает все человеческие законы, при 300% нет такого преступления, на которое он не рискнул бы, хотя бы под страхом виселицы».

В связи с этим рассмотрим подробнее эффект прибыли, поскольку именно он в рассматриваемом случае определяет интенсивность и направление процессов эволюции экономической системы.

Производная эффекта прибыли имеет вид:

$$(\Delta y_p)' = y_p{}'(x_s - x) - y_p{}'(x) = f_p{}'\,(x_s - x) - f_p{}'\,(x).$$

То есть скорость изменения эффекта прибыли определяется разностью производных производственной функции в точках сопряжения (точках x и $x_s - x$, симметричных относительно $x_s/2$).

Нетрудно видеть, что $(\Delta y_p)' = 0$, если $x = x_s/2$. В то же время, производственная функция (6) имеет единственную точку перегиба $x_п$. То есть $(\Delta y_p)'$ имеет экстремумы при всех $x = x_s/2 \neq x_п$. Точка $x = x_п$ требует особого рассмотрения.

Эффект прибыли Δy_p в точке $x = x_s/2$ имеет вид: $\Delta y_p(x_s) = y_p(x_s) - 2y_p(x_s/2)$. Тогда для производной функции $\Delta y_p(x_s)$ по переменной x_s получим:

$$(\Delta y_p)' = y_p{}'(x_s) - 2y_p{}'(x_s/2) = f_p{}'\,(x_s) - f_p{}'\,(x_s/2).$$

Поскольку производная производственной функции $f_p{}'(x)$ монотонно возрастает при $x < x_п$ и монотонно убывает при $x > x_п$, то $(\Delta y_p)' > 0$, если $x_s < x_п$; соответственно, $(\Delta y_p)' < 0$, если $x_s/2 > x_п$ ($x_s > 2x_п$). Таким образом, максимальное значение эффект прибыли $\Delta y_p(x_s)$ будет иметь при $x_п < xs < 2x_п$.

Однако помимо точки $x = x_s/2$ могут быть и другие точки, в которых $(\Delta y_p)' = 0$. При этом должны быть равны производные в сопряженных точках x; $x_s - x$. Для $x \neq x_s/2$ это равенство может иметь место только тогда, когда $x_s/2 > x_п$. В этом случае после перехода через точку $x_s/2$ в окрестности последней образуются дополнительные максимумы, причем в точке $xs/2$ локальный максимум преобразуется в локальный минимум. Тем не менее сам эффект прибыли по-прежнему может быть положительным. Анализ показывает, что для производственной функции (6) критическим значением x_{s0}, при котором $\Delta y_p(x_{s0}) = 0$, является $x_{s0} = \sqrt{2}x_{p0} = \sqrt{2}(\frac{B}{A})^{\frac{1}{2\alpha}}$. При дальнейшем увеличении x_s локальный минимум эффекта прибыли возрастает по абсолютной величине, так что эффект прибыли становится отрицательным, $\Delta y_p < 0$. При этом дополнительные максимумы раздвигаются относительно значения $x_s/2$, а эффект прибыли в этих максимумах уменьшается.

Итак, можно считать, что эффект прибыли $\Delta y_p(x)$ положителен для всех x, если $x_s < ax_{p0}$, где a — некоторый численный коэффициент, зависящий от конкретного вида производственной функции, причем $1 < a < 2$. При этом $E_f \geq 1$ для $x_s < x_{p0}$; $E_f < 1$ для $x_s > x_{p0}$. То есть выгодным является объединение отдельных объемов ресурсов в единый объем x_s. Соответственно, невыгодно разделение объема x_s на составные части.

Если $x_s \approx ax_{p0}$, то $\Delta y_p(x) \approx 0$. Близкий к нулю эффект прибыли по сути означает устойчивость системы относительно действия внутренних сил, поскольку практически невыгодно ни объединение, ни разделение объемов ресурса.

Если $x_s > ax_{p0}$ (при этом $E_f < 1$), то эффект прибыли $\Delta y_p(x)$ отрицателен и максимален по абсолютной величине для значений $x = x_s/2$. С увеличением x_s эффект прибыли увеличивается по модулю. При неизменном x_s с уменьшением x эффект прибыли уменьшается по модулю, и при достаточно малых x (меньших, например, x_{10}) этот эффект становится положительным.

Таким образом, для больших x ($x_s > ax_{p0}$) с точки зрения максимизации прибыли всегда выгодно разделение объема ресурса на равные части. В то же время, разделение на неравные части (например, на большую и малую) может оказаться невыгодным. По сути это значит, что при наличии малого объема ресурса (во всяком случае, такого, для которого прибыль сама по себе отрицательна) почти всегда выгодно присоединить его к большому объему.

С точки зрения теории систем любая система может находиться в различных состояниях: состояние развития, усложнения (прогресса); состояние зрелости (малых изменений); состояние деградации, упрощения (регресса). Эти состояния не обязательно следуют друг за другом в определенной последовательности — из состояния регресса можно вернуться к состоянию прогресса или зрелости и т. д. Для одноресурсных экономических систем объем используемого ресурса можно рассматривать как меру сложности: увеличение объема — прогресс, уменьшение — регресс. Тогда, очевидно, на этапе прогресса должно выполняться условие $E_f > 1$; на этапе зрелости — $E_f \approx 1$; на этапе регресса — $E_f < 1$.

Рассмотрим возможные состояния экономической системы в зависимости от объема используемого ресурса для случая делимой прибыли (случай неделимой прибыли рассмотрен выше).

1. Зарождение (возникновение): $x_s \leq x_{p10}$; $E_f(x) > 1$.

В этом состоянии прибыль отрицательна, $y_p < 0$. С точки зрения синергетики зарождение новой экономической системы может рассматриваться как рост некой флуктуации объема ресурса x, превысившей определенный критический размер [4]. При малых значениях x_s убытки растут с увеличением x_s и достигают максимума при $x_s = x_{p1}$, затем уменьшаются до нуля при $x_s = x_{p10}$. Спонтанно образующиеся экономические системы (экономические агенты) при значениях $x_s < x_{p10}$ долго существовать не могут, поскольку в этом случае производство является убыточным, и для перехода к безубыточности необходимо преодоление некоторого потенциального барьера. Такие агенты вынуждены искать другие пути использования имеющегося ресурса x, в частности объединения с другими агентами. То есть данное состояние неустойчиво — выживают сильнейшие, те, у которых $x_s > x_{p10}$ или, что то же самое, у которых стартовый капитал превосходит значение Cx_{p10}, достаточное для начала экономически обоснованной (прибыльной) деятельности.

2. Рост (прогресс): $x_{p10} < x_s < x_{p0}$; $E_f(x) > 1$.

В данном случае прибыль положительна, $y_p > 0$, а эффект прибыли $\Delta y_p(x)$ положителен для всех x. С точки зрения максимизации прибыли выгодным является увеличение объема ресурса, в том числе и за счет объединения с другими агентами (концентрация, интеграция производства). При этом наибольший выигрыш достигается при равенстве объединяемых ресурсов. В рассматриваемом диапазоне xs имеет место системный эффект (эффект кооперации) — прибыль от суммарного объема ресурса больше суммы прибылей от исходных отдельных объемов. В экономике этот эффект во многом обусловлен разделением труда. Существенно, что в данном случае выигрывают все стороны, если прибыль распределять пропорционально соответствующему объему ресурса. Соответственно, экономическая система является неустойчивой относительно действия внутренних сил, направленных на максимизацию прибыли за счет увеличения объема ресурса.

3. Зрелость (устойчивость): $x_{p0} \leq x_s \leq ax_{p0}$ ($1 < a < 2$); $E_f(x) \approx 1$. Здесь a — численный коэффициент, зависящий от конкретного вида производственной функции.

При объеме ресурса, близком к значению, при котором эластичность равна единице, прибыль слабо зависит от степени концентрации производства. В данном случае практически невыгодно ни объединение отдельных объемов ресурсов в единый объем x_s, ни разделение объема x_s на составные части. То есть в рассматриваемом состоянии экономическая система является устойчивой относительно действия внутренних сил, направленных на максимизацию прибыли. В данном случае xs представляет собой объем ресурса, при котором близки к своему максимальному значению как удельная прибыль, так и норма прибыли. То есть, максимальная суммарная прибыль от некоторого доступного объем ресурса $x_m > ax_{p0}$ будет получена при разделении этого объема на x_m/x_s составных частей. Такое использование ресурса и соответствующий объем производства можно назвать оптимальными.

В частности, если ресурс x — труд, то в точке $x = x_{p0}$ средняя производительность труда равна предельной производительности труда — именно в этой точке максимальна норма прибыли.

При рассмотрении удельной прибыли $y_u(x) = y(x)/x$ объемы ресурса полагались непрерывными величинами. Поэтому максимуму

$yu(x)$, достигаемому при $x = x_{p0}$, формально соответствует не обязательно целое количество составных частей x_m/x_s. Для реальных условий это количество, естественно, должно быть целым, или же должно выполняться условие $x_m >> x_{p0}$. В связи с этим в общем случае единичные объемы ресурса могут отличаться от точного значения x_{p0}, а реальная суммарная прибыль может быть несколько меньше теоретической.

4. Упадок (регресс): $x_s > ax_{p0}$ $(1 < a < 2)$; $E_f(x) < 1$. Здесь a — численный коэффициент, зависящий от конкретного вида производственной функции.

В данном случае прибыль положительна, $y_p > 0$, а эффект прибыли $\Delta y_p(x)$ отрицателен для всех x, близких к $x_s/2$, в том числе и при $x_s > x_{20}$. С точки зрения максимизации прибыли выгодным является разделение заданного объема ресурса x_s на части примерно одинакового объема x_{p0} (деконцентрация, дезинтеграция производства). При этом системный эффект состоит в том, что сумма прибылей от отдельных объемов ресурса оказывается больше прибыли от исходного суммарного объема.

Во многих случаях отрицательное значение эффекта прибыли обусловлено ухудшением управляемости технической системы, увеличением ее инерционности и соответствующим снижением приспособляемости к изменениям во внешней среде.

В то же время, при разделении заданного объема ресурса x_s на несколько заведомо неравных частей может оказаться, что $\Delta y_p(x) > 0$, т. е. такое разделение не выгодно (и, наоборот, выгодно объединение). Рассмотрим для простоты разделение на две части $x << 1$ и $x_s - x$, причем $x << x_s$, так что $x_s - x \approx x_s$. Тогда, учитывая, что $f(x_s + x) \approx f(x_s) + f'(x_s)x$; $f(x) \approx f(0) + f'(0)x = f'(0)x$, получим: $\Delta y_p(x) = f(x_s) - [f(x_s - x) + f(x)] \approx f(x_s + x) - [f(x_s) + f(x)] \approx [f'(x_s) - f'(0)]x$. То есть знак эффекта прибыли определяется знаком разности соответствующих производных. В частности, для производственной функции $f_p(x)$, определяемой (6), как можно видеть, $f_p'(x_s) \geq 0$; $f_p'(0) = 0$. То есть, $\Delta y_p(x) > 0$ для любых конечных значений xs при условии $x << 1$.

Однако в целом выгодным оказывается разделение на части примерно одинакового объема, поскольку соответствующий эффект прибыли значительно больше, чем эффект, обусловленный объединением объема x_s с малым объемом $x << x_s$. Соответственно, экономическая система является неустойчивой относительно действия внутренних сил, направленных на максимизацию прибыли.

Таким образом, в экономической системе действуют внутренние силы, направленные на максимизацию прибыли. По отношению к этим силам устойчивым является лишь состояние, при котором удельная прибыль (норма прибыли) близка к максимально возможной.

Рассмотрим некоторые аналогии. Физические системы, предоставленные сами себе, стремятся занять состояние с минимальной потенциальной энергией. Экономические системы стремятся занять состояние с максимальной прибылью. Термоядерный синтез легких элементов в простейшем случае — это объединение двух протонов и одного или двух нейтронов в ядро атома гелия. Синтез происходит экзотермически (с выделением энергии), поскольку суммарная энергия (масса) исходных составных частей больше энергии (массы) образовавшегося ядра атома гелия. Этому процессу можно уподобить рост экономической системы. Для тяжелых радиоактивных элементов, находящихся ближе к концу периодической таблицы Менделеева, энергетически выгодно деление ядер на несколько «осколков» (в большинстве случаев — на два). Это деление также происходит экзотермически, поскольку суммарная энергия (масса) составных частей меньше энергии (массы) исходного ядра. Этому процессу можно уподобить упадок экономической системы. В физике удельная энергия связи (энергия связи, приходящаяся на один нуклон) максимальна для элементов, находящихся в середине периодической таблицы Менделеева — именно там находятся наиболее устойчивые элементы. Удельной энергии связи можно уподобить удельную прибыль (норму прибыли), которая максимальна для единичного объема ресурса $x_s \approx x_{p0}$, причем $E_f(x_{p0}) = E_y(x_p0) = 1$.

В большинстве случаев для начала экзотермической реакции необходимо преодолеть так называемый потенциальный барьер. Так, термоядерный синтез возможен лишь на крайне малых расстояниях между нуклонами. Однако сближению протонов (заряженных частиц) препятствует их электрическое отталкивание. Энергия этого отталкивания и определяет потенциальный барьер. Для его преодоления можно использовать нагрев до температур в десятки миллионов градусов — например, при взрыве атомной бомбы.

В химических реакциях с участием молекул обычно исходные молекулы трансформируются в молекулы — продукты реакции. Соответственно, меняются связи между атомами, входящими в состав всех молекул. На изменение этих связей, как правило, необходимо затратить определенную энергию.

В экономике также можно говорить о неких потенциальных барьерах. Когда мы говорим о некотором ресурсе *x*, то, по сути, мы говорим о людях, группах физических лиц, юридических лицах и т. д., владеющих, распоряжающихся, пользующихся данным ресурсом. С точки зрения теории систем важно то, что цели системы и цели элементов могут быть различными, в том числе и нефинансового характера. Так, например, известные слова Юлия Цезаря «Лучше быть первым в деревне, чем вторым в Риме», явно противоречат представлениям об экономическом человеке как о человеке, стремящемся только к максимизации прибыли.

Таким образом, состояния экономической системы, определяемые эластичностью производственной функции, представляют собой лишь одну сторону медали. В общем случае необходимо учитывать и другие параметры системы, включая не только экономические, но и социальные, социально-экономические аспекты.

Заключение

Эластичность производственной функции в значительной мере определяет состояние экономической системы. Для случая одной переменной (одного вида ресурса) верно следующее. Если производство является безубыточным, то эластичность функции прибыли и эластичность производственной функции одновременно больше единицы в одном и том же диапазоне объемов ресурса или же меньше единицы в каком-то другом диапазоне объемов ресурса. При этом для обеих функций эластичность равна единице при одном и том же значении объема ресурса.

Если эластичность больше единицы, то прибыль от суммарного объема используемого ресурса оказывается большей, чем сумма прибылей от отдельных объемов (целое больше суммы составных частей). Если эластичность меньше единицы, то прибыль от суммарного объема ресурса оказывается меньшей, чем сумма прибылей от отдельных объемов (целое меньше суммы составных частей).

Производственная функция, эластичность которой с увеличением объема используемого ресурса убывает от значения, большего единицы, до значения, меньшего единицы, естественным образом описывает эволюцию реальных экономических систем. Практически для любой такой системы может быть выявлен свой оптимальный объем производства, устойчивый относительно внутренних сил — тенденций к максимизации прибыли.

При малых объемах ресурса прибыль вначале убывает с увеличением объема ресурса, являясь отрицательной и достигая в некоторой точке локального минимума. При дальнейшем увеличении объема прибыль начинает по модулю возрастать и, наконец, становится положительной. Итак, для перехода к безубыточному производству необходимо преодоление некоторого потенциального барьера — необходим определенный стартовый капитал. При дальнейшем увеличении объема ресурса функция прибыли по-прежнему возрастает, достигая в некоторой точке локального максимума, после чего монотонно убывает и вновь становится отрицательной. Для параметров функции прибыли, имеющих экономический смысл, локальный максимум достигается при эластичности меньше единицы. Этот локальный максимум представляет собой объем производства, оптимальный с точки зрения максимизации неделимого ресурса (например, в случае использования всего объема ресурса только одним цехом некоторого предприятия).

Во многих случаях ресурс может рассматриваться как делимый, как в случае разделения всего объема ресурса между несколькими обособленными цехами, самостоятельно выпускающими аналогичную продукцию.

Если эластичность производственной функции больше единицы, то с точки зрения максимизации прибыли выгодным является объединение исходных раздельно используемых объемов ресурса в один объем (концентрация производства). Если же эластичность производственной функции меньше единицы, то выгодным оказывается разделение заданного объема ресурса на несколько составных частей.

При объеме ресурса, близком к значению, при котором эластичность равна единице, прибыль слабо зависит от степени концентрации производства. Этому состоянию соответствует разделение общего объема ресурса на составные части, обеспечивающее максимизацию нормы прибыли и, соответственно, суммарную прибыль.

В зависимости от объема используемого ресурса можно выделить следующие состояния экономической системы: состояние зарождения; состояние развития (прогресса); состояние зрелости; состояние регресса.

Состояния прогресса и регресса в определенном смысле являются неустойчивыми, поскольку тенденции к максимизации прибыли (внутренние силы) стремятся перевести систему в устойчивое состояние зрелости. Для этого, однако, необходимо преодолеть некоторый потенциальный барьер, связанный с дополнительными затратами на концентрацию/деконцентрацию производства.

Таким образом, в отсутствие мешающих факторов экономическая система эволюционирует к единственному устойчивому состоянию с таким объемом обособленного производства (ресурса), при котором эластичность производственной функции близка к единице (средняя фондоотдача близка к предельной фондоотдаче). В этом состоянии норма прибыли близка к максимально возможной.

Список источников

1. *Гераськин М.И.* Математическая экономика: теория производства и потребительского выбора. — Самара: Самар. гос. аэрокосм. ун-т, 2004. — 102 с.

2. *Клейнер Г.Б.* Новая теория экономических систем и ее приложения // Журнал экономической теории. — 2010. — № 3. — С. 41-57.

3. *Клейнер Г.Б.* Производственные функции. Теория, методы, применение. — М.: Финансы и статистика, 1986. — 239 с.

4. *Коломиец С.М.* Идеальная конкуренция с точки зрения синергетики // Журнал экономической теории. — 2011. — № 2. — С. 139-145

5. *Коломиец С.М.* Производственная функция Кобба — Дугласа с высокой эластичностью производства // Труды филиала РГСУ в г. Обнинске. Вып. 4. Социально-экономические процессы в современной России. — Обнинск, 2009. — С. 66-73.

УДК 316.4:303.725

Ключевые слова: производственная функция, функция прибыли, эластичность, норма прибыли, объем производства, эволюция экономических систем